МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

В. М. Круглов

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

ЧАСТЬ 1. ОСНОВЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ

Учебник
Издание второе,
переработанное и дополненное

Допущено
Учебно-методическим объединением
по классическому университетскому образованию
в качестве учебника для студентов высших учебных
заведений

Москва ■ Юрайт ■ 2016

УДК 519.216(075.8)
ББК 22.171я73
К84

Автор:

Круглов Виктор Макарович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

Рецензенты:

Хохлов Юрий Степанович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

Чупрунов Алексей Николаевич — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа Института математики и механики им. Н. И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета.

Учебник создан в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом по направлениям подготовки «Математика», «Прикладная математика».

В учебнике в доступной форме изложены основы общей теории случайных процессов, теории мартингалов и стохастического интегрирования вместе с необходимыми предварительными сведениями.

Для студентов учреждений высшего профессионального образования.

ISBN 978-5-9916-7886-5 УДК 519.216(075.8)
ББК 22.171я73

ISBN 978-5-9916-7886-5

Оглавление

Предисловие

Основу второго издания учебника по-прежнему составляют лекции о случайных процессах, которые автор читает на факультете вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова. Книга рассчитана на бакалавров старших курсов и магистрантов.

Цель учебника состоит в том, чтобы в доступной форме познакомить читателя с основами теории случайных процессов. В качестве «вершины», которая венчает учебник, выбрана теория стохастического интегрирования. Причина такого выбора продиктована многочисленными применениями стохастического анализа в экономике, технике, физике, химии, финансовой математике и во многих других научных и прикладных направлениях знания.

Отбор материала следует классификации случайных процессов. Предлагаемая классификация не претендует на оригинальность, так как является отражением сложившейся традиции в преподавании теории случайных процессов. Суть классификации состоит в выделении отдельных классов случайных процессов по одному или нескольким свойствам, которыми могут обладать случайные процессы. Отдельные классы случайных процессов могут быть выделены единым методом исследования. Примерами классов случайных процессов могут служить:

- случайные процессы второго порядка;
- стационарные процессы второго порядка;
- строго стационарные случайные процессы;
- случайные процессы с независимыми приращениями;
- случайные процессы Леви;
- мартингалы;
- марковские случайные процессы;

- марковские процессы с локальным взаимодействием;
- диффузионные случайные процессы;
- управляемые диффузионные процессы;
- гауссовские случайные процессы;
- ветвящиеся случайные процессы;
- случайные процессы в теории массового обслуживания.

Некоторые классы случайных процессов могут быть охарактеризованы наличием определенного рода свойств и методом исследования. В качестве примера укажем, что случайные процессы второго порядка объединены в один класс наличием у них конечных первых двух абсолютных моментов, а также тем, что их исследование построено на методах гильбертова пространства. Случайные процессы, используемые в теории массового обслуживания, объединены в один класс набором типичных задач, решаемых в этой области.

Наилучший способ проникнуть в суть теории случайных процессов состоит в привлечении теории меры. По этой причине книга открывается главой, содержащей необходимые сведения из теории меры и интеграла. Доказательства и конструкции, которые приведены в этой главе, составляют тот инструментарий, с помощью которого исследуются многие свойства случайных процессов.

Во второй главе собраны некоторые сведения из теории вероятностей, связанные с понятием независимости. В третьей главе дано представление о понятии случайного процесса и указаны некоторые свойства, которыми могут обладать случайные процессы. В четвертой главе приведены начальные сведения о случайных процессах с независимыми приращениями. Двум особенно важным представителям класса случайных процессов с независимыми приращениями посвящены пятая и шестая главы. В седьмой главе обсуждаются стационарные процессы и строго стационарные случайные процессы. Теория мартингалов является одной из главных тем учебника. Мартингалам посвящена восьмая глава. Стохастическое интегрирование изложено в девятой главе. Изложенная теория стохастического интегрирования достаточна для многих приложений. В заключительной десятой главе дано представление о стохастических дифференциальных уравнениях. Подчеркнута связь с теорией марковских случайных процессов. Изложение материала сопровождается решением типичных примеров и формулировкой задач для самостоятельного решения.

В списке литературы и библиографическом комментарии перечислены источники для дальнейшего чтения, в которых можно найти другие точки зрения на понятие случайного процесса.

Предполагается, что после изучения курса «Случайные процессы» бакалавр, магистрант должен:

знать

- основные понятия, терминологию, основные классы случайных процессов, области возможных применений;
- основные методы исследования и примеры нестандартных подходов исследования случайных процессов;
- теорию стохастического интегрирования и стохастических дифференциальных уравнений;

уметь

- решать типичные задачи и формулировать прикладные задачи в терминах теории случайных процессов;
- строить модели естественных явлений, исследуемые методами теории случайных процессов и стохастического анализа;

владеть

- основными методами исследования случайных процессов;
- методами стохастического интегрирования;
- навыками интуитивного подхода к решению нестандарных задач с привлечением стохастического анализа.

Книга разбита на главы, каждая глава разбита на несколько параграфов. Все утверждения названы теоремами. Каждая теорема имеет номер a.b.c, обозначающий главу a, параграф b, номер теоремы c. Каждая выключенная формула имеет номер (a.b.c) с указанием главы a, параграфа b, номера формулы c. Символы ► и ◄ обозначают начало и конец доказательства теоремы.

Автор выражает благодарность студентам и аспирантам, которые прослушали курс лекций и приняли участие в редактировании учебника. Особая благодарность доценту Н. Н. Голиковой и профессорам А. Н. Чупрунову и Ю. С. Хохлову за критические замечания.

Москва, 2016 г. В. М. Круглов

Глава 1
Математические основы

В данной главе собраны необходимые сведения из теории множеств, теории интегрирования и теории вероятностей. Утверждения и их доказательства составляют математический аппарат для исследования многих свойств случайных процессов.

1.1. Операции с множествами

Напомним некоторые сведения из наивной (неаксиоматической) теории множеств. Приводимое далее «определение» множества было предложено Кантором (Moritz Benedict Cantor) – основателем теории множеств.

1.1.1. Понятие множества. *Множеством* называется любое объединение в одно целое определенных объектов. Объекты, составляющие множество, называются *точками.* Любая часть точек данного множества называется его *подмножеством.* Множество, не содержащее точек, называется *пустым* и обозначается $\varnothing$.

Примерами являются множество $\mathbb{R}$ всех вещественных чисел, множество $\mathbb{R}_+$ всех неотрицательных вещественных чисел, множество $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел, множество $\mathbb{Q}_+$ всех неотрицательных рациональных чисел, множество $\mathbb{N}$ всех натуральных чисел, множество $\mathbb{Z}$ всех целых чисел, множество $\mathbb{C}$ всех комплексных чисел. Обозначим $T, t_* = \inf\{t\colon t \in T\}, t^* = \sup\{t\colon t \in T\}$ произвольное множество вещественных чисел и его граничные точки.

Далее предполагается, что все рассматриваемые множества являются подмножествами данного множества Ω. Его точки будут обозначаться строчной греческой буквой ω (омега). Отношения между точками и множествами, а также между множествами принято записывать с помощью знаков Пеано (Giuseppe Peano). А именно, если ω и A – точка и подмножество, то записи $\omega \in A$ и $\omega \notin A$ означают, что ω принадлежит A и ω не принадлежит A. Если A и B – подмножества множества Ω, то запись $A \subseteq B$ означает, что A является частью (подмножеством) B. Запись $A \subset B$ означает, что A является частью B и не совпадает с ним.

Множества A и B называются *равными,* если они состоят из одних точек. Для доказательства равенства множеств A и B достаточно убедиться, что каждое из них является частью другого.

Множество, точками которого являются подмножества некоторого множества, называется *классом* или *семейством* множеств.

Объединением множеств из непустого класса (семейства) $\mathcal{L}$ называется множество точек из Ω, каждая из которых принадлежит хотя бы одному из множеств класса (семейства) $\mathcal{L}$ и обозначается $\cup_{A\in\mathcal{L}}A$. В случае пустого класса $\mathcal{L}$ полагают $\cup_{A\in\mathcal{L}}A = \varnothing$.

Пересечением множеств из непустого класса (семейства) $\mathcal{L}$ называется множество точек из Ω, каждая из которых принадлежит всем множествам из класса $\mathcal{L}$ и обозначается $\cap_{A\in\mathcal{L}}A$. В случае пустого класса (семейства) $\mathcal{L}$ полагают $\cap_{A\in\mathcal{L}}A = \Omega$.

Разностью множеств A и B называется множество точек из A, которые не принадлежат B, и обозначается $A \setminus B$. Разность $\Omega \setminus A$ называется *дополнением* множества A и обозначается A^c.

Объединение $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ называется *симметрической разностью* множеств A и B и обозначается $A \triangle B$.

1.1.2. Теорема. *Операции с множествами связаны между собой правилами де Моргана* (*Augustus De Morgan*)

$$(\cup_{A\in\mathcal{L}}A)^c = \cap_{A\in\mathcal{L}}A^c, (\cap_{A\in\mathcal{L}}A)^c = \cup_{A\in\mathcal{L}}A^c.$$

► Докажем, например, первое равенство. Если $\omega \in (\cup_{A\in\mathcal{L}}A)^c$, то $\omega \notin \cup_{A\in\mathcal{L}}A$ и, следовательно, $\omega \notin A$ для любого $A \in \mathcal{L}$. Поэтому $\omega \in A^c$ для любого $A \in \mathcal{L}$ и, следовательно, $\omega \in \cap_{A\in\mathcal{L}}A^c$. Аналогично, если $\omega \in \cap_{A\in\mathcal{L}}A^c$, то $\omega \notin A$ для любого $A \in \mathcal{L}$. Поэтому $\omega \notin \cup_{A\in\mathcal{L}}A$ и, следовательно, $\omega \in (\cup_{A\in\mathcal{L}}A)^c$. Множества $\cap_{A\in\mathcal{L}}A^c$ и $(\cup_{A\in\mathcal{L}}A)^c$ равны, так как являются частями друг друга. ◄

Операции объединения и пересечения обладают свойствами коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности. Свойство *коммутативности* состоит в том, что объединение и пересечение множеств из данного класса не зависят от их «расположения» в классе. Например, $A \cup B = B \cup A$ и $A \cap B = B \cap A$. Если класс $\mathcal{L}$ представляет собой объединение классов $\mathcal{L}_t$, $t \in T$, то свойство *ассоциативности* выражается равенствами

$$\cup_{A\in\mathcal{L}} A = \cup_{t\in T}(\cup_{A\in\mathcal{L}_t} A), \ \ \cap_{A\in\mathcal{L}} A = \cap_{t\in T}(\cap_{A\in\mathcal{L}_t} A).$$

Пусть B является подмножеством множества Ω и $\mathcal{L}$ является классом (семейством) подмножеств множества Ω. Свойство *дистрибутивности* выражается равенствами

$$B \cup (\cap_{A\in\mathcal{L}} A) = \cap_{A\in\mathcal{L}}(B \cup A), \ \ B \cap (\cup_{A\in\mathcal{L}} A) = \cup_{A\in\mathcal{L}}(B \cap A).$$

Последовательность $\{A_n\}_{n\geq 1}$ множеств называется *возрастающей* (*убывающей*), если $A_n \subseteq A_{n+1}$ ($A_{n+1} \subseteq A_n$) для всех $n \in \mathbb{N}$. Запись $A_n \uparrow$ ($A_n \downarrow$) означает, что последовательность $\{A_n\}_{n\geq 1}$ возрастает (убывает).

Пусть дано подмножество A множества Ω. Определим *индикаторную функцию* $\mathbb{1}_A\colon \Omega \to \mathbb{R}$ множества A, положив $\mathbb{1}_A(\omega) = 1$, если $\omega \in A$, и $\mathbb{1}_A(\omega) = 0$, если $\omega \in A^c$.

Операции с множествами можно выразить в терминах их индикаторных функций. Например, соотношения $A \subseteq B$, $A = B$, $A \cap B = \varnothing$ между множествами A и B эквивалентны соотношениям $\mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$, $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$, $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B = 0$ индикаторных функций.

Имеется правило, которое позволяет строить новые множества из числа имеющихся множеств. При этом больше не предполагается, что множества, из которых строятся новые множества, являются подмножествами какого-либо одного данного множества.

1.1.3. Определение. Пусть даны множества $\Omega_t, t \in T$. Множество функций ω_t, $t \in T$, со значениями $\omega_t \in \Omega_t$ называется *прямым произведением* множеств Ω_t, $t \in T$, и обозначается $\times_{t\in T}\Omega_t$. Прямое произведение $\times_{t\in T} A_t$ подмножеств $A_t \subseteq \Omega_t$ называется *прямоугольником со сторонами* A_t, $t \in T$.

Пустое множество $\varnothing$ можно рассматривать как прямоугольник, некоторые стороны которого являются пустыми множествами.

1.1.4. Пример. Если $T = \{1, \ldots, d\}$, то прямое произведение множеств $\Omega_1, \ldots, \Omega_d$ совпадает с множеством наборов $(\omega_1, \ldots, \omega_d)$, $\omega_k \in \Omega_k$, $k = 1, \ldots, d$, и обозначается $\times_{t=1}^{d}\Omega_t$. Оно представляет собой обобщение евклидова пространства $\mathbb{R}^d$, которое является прямым произведением d копий вещественной прямой $\mathbb{R}$.

1.1.5. Пример. Прямое произведение множеств $\Omega_k, k \in \mathbb{N}$, состоит из последовательностей $(\omega_1, \ldots, \omega_k, \ldots)$, $\omega_k \in \Omega_k$, $k \in \mathbb{N}$, и обозначается $\times_{k=1}^{\infty}\Omega_k$.

Множество называется *конечным*, если оно состоит из конечного числа точек. Пустое множество считается конечным. Множество называется *бесконечным*, если оно не является конечным.

1.1.6. Определение. Множество A называется *счетным,* если существует взаимно однозначное соответствие между A и множеством $\mathbb{N}$ натуральных чисел.

Это определение можно выразить иначе. Множество A называется счетным, если его точки можно записать в виде последовательности $\{a_n\}_{n\geq 1}$. При этом понадобятся все натуральные числа.

1.1.7. Теорема. (i) *Любое бесконечное множество содержит счетное подмножество.* (ii) *Любое подмножество счетного множества конечно или счетно.* (iii) *Объединение конечного или счетного числа счетных множеств счетно.* (iv) *Объединение счетного числа конечных множеств конечно или счетно.* (v) *Прямое произведение конечного числа счетных множеств счетно.*

▶ Доказательство этой теоремы можно найти в учебниках по теории функций и функциональному анализу. ◀

О некоторых недостатках стандартного доказательства этой теоремы пойдет речь в параграфе 1.3.

1.1.8. Определение. Бесконечное множество, не являющееся счетным, называется *несчетным* множеством. Несчетное множество A имеет *мощность континуума,* если существует взаимно однозначное отображение множества A на вещественную прямую $\mathbb{R}$.

Можно доказать, что каждое из множеств $\mathbb{R}^d, d \in \mathbb{N}$, а также $\mathbb{R}^\infty = \times_{n=1}^\infty A_n$ с $A_n = \mathbb{R}$, имеет мощность континуума.

1.1.9. Определение. Множество $A \subseteq \mathbb{R}^d$ называется *выпуклым,* если $\alpha x + (1-\alpha)y \in A$ для любых $x, y \in A, \alpha \in (0,1)$.

Следующий список содержит все выпуклые множества на вещественной прямой: $\varnothing$, $\{a\}$, (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$, $[a,b]$, $(-\infty,a), (-\infty,a]$, $(a,\infty), [a,\infty), \mathbb{R} = (-\infty,\infty)$, где $a, b \in \mathbb{R}$.

Любое бесконечное выпуклое множество является несчетным.

1.2. Классы множеств

Напомним, что классом (семейством) множеств называется множество, точками которого являются подмножества некоторого множества. Обозначим 2^Ω класс всех подмножеств множества Ω.

1.2.1. Определение. Класс $\mathcal{E} \subseteq 2^{\Omega}$ называется π-классом, если $A \cap B \in \mathcal{E}$ для любых $A, B \in \mathcal{E}$. Класс $\mathcal{A} \subseteq 2^{\Omega}$ называется *алгеброй,* если множества $\Omega, A^c, A \cup B$ принадлежат $\mathcal{A}$ для любых $A, B \in \mathcal{A}$. Класс $\mathcal{M} \subseteq 2^{\Omega}$ называется *монотонным классом,* если $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$ для любых $A_n \in \mathcal{M}$ таких, что $A_n \uparrow$, и $\cap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$ для любых $A_n \in \mathcal{M}$ таких, что $A_n \downarrow$. Класс $\mathcal{F}$ называется сигма-алгеброй (σ-алгеброй), если он является алгеброй и содержит объединение счетного числа любых своих множеств. Класс $\mathcal{D} \subseteq 2^{\Omega}$ называется λ-классом, если $\Omega \in \mathcal{D}$ и $A \setminus B \in \mathcal{D}$, $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$ для любых $A, B, A_n \in \mathcal{D}, n \in \mathbb{N}$, таких, что $B \subseteq A$ и $A_n \uparrow$.

Класс 2^{Ω} является примером π/λ-класса, монотонного класса, алгебры, σ-алгебры. Любая алгебра является π-классом, любая сигма-алгебра является λ-классом и монотонным классом.

1.2.2. Теорема. *Если некоторый класс $\mathcal{L} \subseteq 2^{\Omega}$ является π-классом и λ-классом, то он является сигма-алгеброй.*

► Класс $\mathcal{L}$, будучи λ-классом, содержит Ω и дополнение A^c любого $A \in \mathcal{L}$. Если $A, B \in \mathcal{L}$, то $A^c \cap B^c \in \mathcal{L}$, так как $\mathcal{L}$ является π-классом. Класс $\mathcal{L}$, будучи λ-классом, наряду с множеством $A^c \cap B^c$ содежит его дополнение $(A^c \cap B^c)^c = A \cup B$. Тем самым доказано, что класс $\mathcal{L}$ является алгеброй. Пусть $A_n \in \mathcal{L}$, $n \in \mathbb{N}$. Класс $\mathcal{L}$, будучи алгеброй, содержит множества $B_n = \cup_{k=1}^{n} A_k, n \in \mathbb{N}$. Класс $\mathcal{L}$, будучи λ-классом, содержит объединение $\cup_{n=1}^{\infty} B_n$ возрастающих множеств $B_n, n \in \mathbb{N}$. Так как $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$, то $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{L}$. ◄

1.2.3. Теорема. *Пересечение произвольного числа λ/π-классов, монотонных классов, алгебр, σ-алгебр является соответственно λ/π-классом, монотонным классом, алгеброй, σ-алгеброй.*

► Утверждение следует непосредственно из определений перечисленных классов. ◄

1.2.4. Определение. Пересечение всех сигма-алгебр, содержащих данный класс $\mathcal{L} \subseteq 2^{\Omega}$, называется сигма-алгеброй, *порожденной* классом $\mathcal{L}$, и обозначается $\sigma(\mathcal{L})$.

Сигма-алгебра, порожденная классом $\mathcal{L}$, также называется *минимальной* σ-алгеброй, содержащей класс $\mathcal{L}$. Минимальная сигма-алгебра существует. Действительно, σ-алгебра 2^{Ω} содержит класс $\mathcal{L}$. Далее следует применить теорему 1.2.3.

По аналогии с минимальной σ-алгеброй, содержащей класс $\mathcal{L}$, можно определить и доказать существование *минимальной* алгебры, а также *минимального* π/λ-класса и *минимального* монотонного класса, содержащих данный класс $\mathcal{L}$.

1.2.5. Определение. Сигма-алгебра, порожденная классом открытых множеств евклидова пространства $\mathbb{R}^d$, называется *борелевской* сигма-алгеброй и обозначается $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Множества из $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ называются *борелевскими* множествами. Условимся, следуя традиции, писать $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ вместо $\mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$.

Напомним, что подмножество евклидова пространства $\mathbb{R}^d$ называется *открытым,* если его можно представить в виде объединения некоторого конечного или бесконечного числа *открытых* шаров $B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^d \colon \|x-a\| < r\}$. Точка $a = (a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d$ называется *центром* открытого шара, число $r > 0$ называется *радиусом* открытого шара. Величина $\|x-y\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_d-y_d)^2}$ называется *расстоянием* между точками $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ и $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$. Заметим, что объединение любого числа открытых множеств является открытым множеством.

Множество $F \subseteq \mathbb{R}^d$ называется *замкнутым,* если его дополнение F^c является открытым множеством. С помощью правила де Моргана легко убедиться, что пересечение любого числа замкнутых множеств является замкнутым множеством. Заметим, что множества $\varnothing$ и $\mathbb{R}^d$ открыты и замкнуты. Легко видеть, что борелевская сигма-алгебра $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ порождается классом замкнутых множеств.

Наряду с множеством $\mathbb{R}$ всех вещественных чисел нам придется иметь дело с множеством $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$. Множества $\mathbb{R}$ и $\overline{\mathbb{R}}$ называют *вещественной* прямой и *расширенной* вещественной прямой. Множество $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ называется *открытым,* если его можно представить в виде объединения конечного или бесконечного числа множеств вида $(a,b), [-\infty, a), (a, \infty], a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Множество $F \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ называется *замкнутым*, если его дополнение $F^c = \overline{\mathbb{R}} \setminus F$ является открытым множеством. Заметим, что объединение любого числа открытых в $\overline{\mathbb{R}}$ множеств является открытым в $\overline{\mathbb{R}}$ множеством. С помощью правила де Моргана можно убедиться, что пересечение любого числа замкнутых в $\overline{\mathbb{R}}$ множеств является замкнутым в $\overline{\mathbb{R}}$ множеством.

Обозначим $\mathcal{Q}_1$ класс множеств вида $(a,b), [-\infty, a), (a, \infty]$, где $a, b \in \mathbb{Q}, a < b$. Нетрудно видеть, что класс $\mathcal{Q}_1$ является счетным. Заметим, что любое открытое множество $O \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ можно представить в виде объединения конечного или счетного числа множеств из класса $\mathcal{Q}_1$. Из правила де Моргана следует, что любое замкнутое множество $F \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ можно представить в виде пересечения конечного или счетного числа дополнений A^c множеств $A \in \mathcal{Q}_1$.

Множество $\overline{\mathbb{R}}^d$ точек $(a_1, \ldots, a_d)$ с координатами $a_1, \ldots, a_d \in \overline{\mathbb{R}}$ называется *расширенным* евклидовым пространством. Множество $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}^d$ называется *открытым,* если его можно представить в виде объединения конечного или бесконечного числа прямоугольников $\times_{k=1}^d O_k$ с открытыми сторонами $O_1, \ldots, O_d \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Множество $F \subseteq \overline{\mathbb{R}}^d$ называется *замкнутым,* если его дополнение $F^c = \overline{\mathbb{R}}^d \setminus F$ является открытым множеством. Здесь имеет место полная аналогия с рассмотренным выше одномерным случаем. В частности, объединение любого числа открытых в $\overline{\mathbb{R}}^d$ множеств является открытым в $\overline{\mathbb{R}}^d$ множеством. Пересечение любого числа замкнутых в $\overline{\mathbb{R}}^d$ множеств является замкнутым в $\overline{\mathbb{R}}^d$ множеством.

Обозначим $\mathcal{Q}_d$ класс прямоугольников $\times_{k=1}^d O_k$ со сторонами из $\mathcal{Q}_1$. Легко видеть, что класс $\mathcal{Q}_d$ является счетным. Любое открытое в $\overline{\mathbb{R}}^d$ множество можно представить в виде объединения конечного или счетного числа множеств из $\mathcal{Q}_d$. Любое замкнутое в $\overline{\mathbb{R}}^d$ множество можно представить в виде пересечения конечного или счетного числа множеств A^c, где $A \in \mathcal{Q}_d$.

Сигма-алгебра $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^d)$, порожденная классом всех открытых в $\overline{\mathbb{R}}^d$ множеств, называется *борелевской* σ-алгеброй расширенного евклидова пространства $\overline{\mathbb{R}}^d$. Множества из $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^d)$ называются *борелевскими* множествами. Условимся писать $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ вместо $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^1)$. С помощью правил де Моргана легко убедиться, что сигма-алгебра $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^d)$ порождается классом всех замкнутых в $\overline{\mathbb{R}}^d$ множеств.

Класс $\mathcal{L}$ подмножеств расширенного евклидова пространства $\overline{\mathbb{R}}^d$ (евклидова пространства $\mathbb{R}^d$) называется *покрытием* множества K, лежащего в $\overline{\mathbb{R}}^d$ (соответственно в $\mathbb{R}^d$), если $K \subseteq \cup_{A \in \mathcal{L}} A$. Покрытие $\mathcal{L}$ множества K называется *открытым* покрытием, если множества, входящие в $\mathcal{L}$, являются открытыми в $\overline{\mathbb{R}}^d$ (соответственно в $\mathbb{R}^d$).

Множество $K \subseteq \overline{\mathbb{R}}^d$ (соответственно $K \subseteq \mathbb{R}^d$) называется *компактным,* если любое его открытое покрытие $\mathcal{L}$ содержит *конечное подпокрытие.* Другими словами, если существует конечное число множеств $A_k \in \mathcal{L}, k = 1, \ldots, n$, объединение которых содержит K. Можно доказать, что множество $K \subset \mathbb{R}^d$ является компактным тогда и только тогда, когда оно ограничено и замкнуто. Напомним, что множество $K \subset \mathbb{R}^d$ называется *ограниченным,* если оно содержится в некотором шаре конечного радиуса. Понятие компактности можно выразить несколькими способами. Следующая теорема, как нетрудно убедиться, равносильна утверждению, что расширенное евклидово пространство $\overline{\mathbb{R}}^d$ является компактным множеством.

1.2.6. Теорема. *Пересечение* $\cap_{t\in T}F_t$ *любого числа замкнутых множеств* $F_t \subseteq \overline{\mathbb{R}}^d, t \in T$, *содержит по крайней мере одну точку, если* $\cap_{k=1}^n F_{t_k} \neq \varnothing$ *для любых* $n \in \mathbb{N}$ *и* $t_1, \dots, t_n \in T$.

► Предположим, что $\cap_{t\in T}F_t = \varnothing$. По правилу де Моргана выполняется равенство $\overline{\mathbb{R}}^d = \cup_{t\in T}F_t^c$. Найдется конечное число множеств $F_{t_1}^c, \dots, F_{t_n}^c$ со свойством $\cup_{k=1}^n F_{t_k}^c = \overline{\mathbb{R}}^d$. В этом можно убедиться, повторив, почти дословно, доказательство классической теоремы Бореля-Лебега о покрытии сегмента. По правилу де Моргана выполняется невозможное равенство $\cap_{k=1}^n F_{t_k} = \varnothing$. ◄

Следующая теорема помогает упростить доказательства многих трудных утверждений. Утверждения (i) и (ii) называются теоремой Серпинского и теоремой о монотонном классе.

1.2.7. Теорема. (i) *Если* π*-класс* $\mathcal{E} \subseteq 2^\Omega$ *содержится в* λ*-классе* $\mathcal{D} \subseteq 2^\Omega$, *то* $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}$. (ii) *Если алгебра* $\mathcal{A} \subseteq 2^\Omega$ *содержится в монотонном классе* $\mathcal{M} \subseteq 2^\Omega$, *то* $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{M}$.

► (i). Обозначим $\lambda(\mathcal{E})$ минимальный λ-класс, содержащий данный π-класс $\mathcal{E}$. Возьмем произвольное множество $A \in \mathcal{E}$ и обозначим $\mathcal{L}(A)$ класс множеств $B \in \lambda(\mathcal{E})$ таких, что $A \cap B \in \lambda(\mathcal{E})$.

Убедимся, что $\mathcal{L}(A)$ является λ-классом. Он содержит Ω, так как $A \cap \Omega = A \in \mathcal{E} \subseteq \lambda(\mathcal{E})$. Если $B, C \in \mathcal{L}(A)$ и $B \subseteq C$, то разность $C \setminus B$ принадлежит $\mathcal{L}(A)$, так как $A\cap B, A\cap C \in \lambda(\mathcal{E})$ и $A\cap B \subseteq A\cap C$, и, следовательно, $A \cap (C \setminus B) = (A \cap C) \setminus (A \cap B) \in \lambda(\mathcal{E})$. Далее, если $B_n \in \mathcal{L}(A), n \in \mathbb{N}, B_n \uparrow$, то $\cup_{n=1}^\infty B_n \in \mathcal{L}(A)$, так как $A \cap B_n \in \lambda(\mathcal{E})$ и $A \cap B_n \uparrow$, и, следовательно, $A \cap (\cup_{n=1}^\infty B_n) = \cup_{n=1}^\infty (A \cap B_n) \in \lambda(\mathcal{E})$.

Класс $\mathcal{L}(A)$ содержит π-класс $\mathcal{E}$. Действительно, если $B \in \mathcal{E}$, то $A\cap B \in \mathcal{E} \subseteq \lambda(\mathcal{E})$. Класс $\mathcal{L}(A)$ является λ-классом. Он удовлетворяет условиям $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{L}(A) \subseteq \lambda(\mathcal{E})$, и, следовательно, $\lambda(\mathcal{E}) = \mathcal{L}(A)$.

Возьмем произвольное множество $B \in \lambda(\mathcal{E})$ и обозначим $\mathcal{M}(B)$ класс множеств $D \in \lambda(\mathcal{E})$ таких, что $B \cap D \in \lambda(\mathcal{E})$. Класс $\mathcal{M}(B)$ является λ-классом и содержит π-класс $\mathcal{E}$. Отсюда следует равенство $\mathcal{M}(B) = \lambda(\mathcal{E})$. Тем самым доказано, что класс $\lambda(\mathcal{E})$ является π-классом. По теореме 1.2.2 класс $\lambda(\mathcal{E})$ является σ-алгеброй. Осталось заметить, что $\lambda(\mathcal{E}) \subseteq \lambda(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D}$, так как $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}$.

(ii). Обозначим $m(\mathcal{A})$ минимальный монотонный класс, содержащий алгебру $\mathcal{A}$. Фиксируем множество $A \in \mathcal{A}$ и обозначим $\mathcal{L}(A)$ класс множеств $B \in m(\mathcal{A})$ таких, что $B \setminus A \in m(\mathcal{A})$. Нетрудно убедиться, что $\mathcal{L}(A)$ является монотонным классом. Класс $\mathcal{L}(A)$ содержит алгебру $\mathcal{A}$, так как $B \setminus A \in \mathcal{A} \subseteq m(\mathcal{A})$ для любого $B \in \mathcal{A}$. Поэтому $m(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{L}(A) \subseteq \mathcal{M}$. Возьмем произвольное множество $B \in m(\mathcal{A})$ и обозначим $\mathcal{M}(B)$ класс множеств $D \in m(\mathcal{A})$ таких, что $D \setminus B \in m(\mathcal{A})$. Нетрудно убедиться, что $\mathcal{M}(B)$ является монотонным классом и содержит алгебру $\mathcal{A}$. Поэтому $m(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{M}(B)$. Это означает, что $m(\mathcal{A})$ является λ-классом. Он содержит π-класс $\mathcal{A}$. В силу утверждения (i) сигма-алгебра $\sigma(\mathcal{A})$ содержится в λ-классе $m(\mathcal{A})$. Заметим, что $\mathcal{A} \subseteq m(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{M}$. ◄

1.2.8. Теорема. *Пусть даны множество $B \in 2^{\Omega}$ и класс $\mathcal{L} \subseteq 2^{\Omega}$. Если $\mathcal{L}$ является алгеброй, сигма-алгеброй, π/λ-классом, монотонным классом, то класс $B \cap \mathcal{L} = \{B \cap A \colon A \in \mathcal{L}\} \subseteq 2^{B}$ является соответственно алгеброй, сигма-алгеброй, π/λ-классом, монотонным классом.*

► Предположим, например, что $\mathcal{L}$ является σ-алгеброй. Требуется доказать, что класс $B \cap \mathcal{L}$ подмножеств множества B является σ-алгеброй. Он содержит B, так как $B = B \cap \Omega$ и $\Omega \in \mathcal{L}$. Если $A \in \mathcal{L}$, то $B \setminus (B \cap A) = B \cap A^c \in B \cap \mathcal{L}$, так как $A^c \in \mathcal{L}$. Если $A_n \in \mathcal{L}, n \in \mathbb{N}$, то $\cup_{n=1}^{\infty}(B \cap A_n) = B \cap (\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \in B \cap \mathcal{L}$, так как $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{L}$. ◄

1.2.9. Определение. Пусть даны множества Ω и Ω', любой класс $\mathcal{L}' \subseteq 2^{\Omega'}$ и любое отображение $f \colon \Omega \to \Omega'$. Множество $\{\omega \in \Omega \colon f(\omega) \in A'\}$ называется *прообразом* множества $A' \subseteq \Omega'$ и обозначается $f^{-1}(A')$. Класс $f^{-1}(\mathcal{L}') = \{f^{-1}(A') \colon A' \in \mathcal{L}'\}$ называется *прообразом* класса $\mathcal{L}'$.

Вместо $f^{-1}(A')$ часто пишут $\{f \in A'\}$. Чтобы подчеркнуть связь с отображением, множество $f^{-1}(A')$ также называется прообразом множества A' относительно отображения f. Класс $f^{-1}(\mathcal{L}')$ называется прообразом класса $\mathcal{L}'$ относительно отображения f.

1.2.10. Теорема. *Пусть даны отображение f множества Ω в множество Ω' и некоторый класс $\mathcal{L}' \subseteq 2^{\Omega'}$. Если $\mathcal{L}'$ является алгеброй, π/λ-классом, монотонным классом, σ-алгеброй, то класс $f^{-1}(\mathcal{L}') \subseteq 2^{\Omega}$ является соответственно алгеброй, π/λ-классом, монотонным классом, σ-алгеброй.*

► Все утверждения следуют из следующих свойств прообразов:

$$f^{-1}(\Omega') = \Omega, f^{-1}(\varnothing) = \varnothing, f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B'),$$
$$\Omega \setminus f^{-1}(A') = f^{-1}(\Omega' \setminus A'), f^{-1}(\cup_{n=1}^{\infty} A'_n) = \cup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A'_n)$$

для любых множеств $A', B', A'_n \subseteq \Omega'$, $n \in \mathbb{N}$, с сохранением свойства монотонности: если $A'_n \uparrow (A'_n \downarrow)$, то $f^{-1}(A'_n) \uparrow (f^{-1}(A'_n) \downarrow)$. ◀

1.2.11. Теорема. *Пусть даны отображение* $f\colon \Omega \to \Omega'$ *множества* Ω *в множество* Ω' *и некоторый класс* $\mathcal{L} \subseteq 2^{\Omega}$. *Если класс* $\mathcal{L}$ *является алгеброй,* σ*-алгеброй,* π/λ*-классом, монотонным классом, то класс* $\{A' \subseteq \Omega' \colon f^{-1}(A') \in \mathcal{L}\} \subseteq 2^{\Omega'}$ *является соответственно алгеброй,* σ*-алгеброй,* π/λ*-классом, монотонным классом.*

▶ Теорема следует из знакомых свойств прообразов относительно отображения f, перечисленных в предыдущей теореме. ◀

1.2.12. Теорема. *Пусть даны отображение* $f\colon \Omega \to \Omega'$ *множества* Ω *в множество* Ω' *и любой класс* $\mathcal{L}' \subseteq 2^{\Omega'}$. *Тогда справедливо следующее равенство* $f^{-1}(\sigma(\mathcal{L}')) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{L}'))$.

▶ По теореме 1.2.10 класс $f^{-1}(\sigma(\mathcal{L}'))$ является σ-алгеброй. Так как $\mathcal{L}' \subseteq \sigma(\mathcal{L}')$, то $f^{-1}(\mathcal{L}') \subseteq f^{-1}(\sigma(\mathcal{L}'))$ и $\sigma(f^{-1}(\mathcal{L}')) \subseteq f^{-1}(\sigma(\mathcal{L}'))$. Осталось доказать, что $f^{-1}(\sigma(\mathcal{L}')) \subseteq \sigma(f^{-1}(\mathcal{L}'))$. По теореме 1.2.11 класс $\mathcal{M} = \{A' \in \sigma(\mathcal{L}') \colon f^{-1}(A') \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{L}'))\}$ является сигма-алгеброй. Так как $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{M} \subseteq \sigma(\mathcal{L}')$, то $\mathcal{M} = \sigma(\mathcal{L}')$. Другими словами, прообраз $f^{-1}(A')$ любого множества $A' \in \sigma(\mathcal{L}')$ принадлежит сигма-алгебре $\sigma(f^{-1}(\mathcal{L}'))$. Это означает, что $f^{-1}(\sigma(\mathcal{L}')) \subseteq \sigma(f^{-1}(\mathcal{L}'))$. ◀

1.2.13. Следствие. *Для любого класса* $\mathcal{L} \subseteq 2^{\Omega}$ *и для любого множества* $A \subseteq \Omega$ *выполняется равенство* $\sigma(A \cap \mathcal{L}) = A \cap \sigma(\mathcal{L})$.

▶ По теореме 1.2.12, применительно к отображению $f\colon A \to \Omega$, $f(\omega) = \omega$, выполняется равенство $\sigma(f^{-1}(\mathcal{L})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{L}))$. Осталось заметить, что $f^{-1}(\mathcal{L}) = A \cap \mathcal{L}$ и $f^{-1}(\sigma(\mathcal{L})) = A \cap \sigma(\mathcal{L})$. Последние два равенства являются следствием того, что $f^{-1}(B) = A \cap B$ для любого подмножества B множества Ω. ◀

1.2.14. Определение. Пара $(\Omega, \mathcal{F})$, состоящая из некоторого множества Ω и некоторой сигма-алгебры $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$, называется *измеримым пространством.* Множества из $\mathcal{F}$ называются *измеримыми* множествами. Пусть даны измеримые пространства $(\Omega_t, \mathcal{F}_t)$, $t \in T$. Прямоугольник $\times_{t\in T} A_t$ называется *измеримым,* если $A_t \in \mathcal{F}_t$ для всех $t \in T$. Сигма-алгебра, порожденная классом измеримых прямоугольников $\times_{t\in T} A_t$ со сторонами $A_t = \Omega_t$ для всех $t \in T$ за исключением конечного числа $t \in T$, называется *прямым произведением* σ-алгебр $\mathcal{F}_t$, $t \in T$, и обозначается $\otimes_{t\in T}\mathcal{F}_t$. Измеримое пространство $(\times_{t\in T}\Omega_t, \otimes_{t\in T}\mathcal{F}_t)$ называется *прямым произведением* измеримых пространств $(\Omega_t, \mathcal{F}_t)$, $t \in T$.

Если $T = \{1, \ldots, d\}$ или $T = \{t_k\}_{k\geq 1}$, то прямое произведение измеримых пространств $(\Omega_t, \mathcal{F}_t)$, $t \in T$, соответственно обозначают $(\times_{k=1}^{d} \Omega_k, \otimes_{k=1}^{d} \mathcal{F}_k)$ и $(\times_{k=1}^{\infty} \Omega_{t_k}, \otimes_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_{t_k})$.

1.2.15. Определение. Пусть $(\times_{t\in T}\Omega_t, \otimes_{t\in T}\mathcal{F}_t)$ является прямым произведением измеримых пространств $(\Omega_t, \mathcal{F}_t)$, $t \in T$. Для любых $U \subset T$ и $A \subseteq \otimes_{t\in U}\mathcal{F}_t$ множество $C_U(A)$ функций из $\times_{t\in T}\Omega_t$, сужения которых на U принадлежат A, называется *цилиндрическим множеством с основанием* A. Если U – конечное множество, то $C_U(A)$ называется цилиндрическим множеством с *конечномерным основанием.* Если U – счетное множество, то $C_U(A)$ называется цилиндрическим множеством со *счетно-конечным основанием.*

В соответствии с определением цилиндрическое множество с конечным множеством $U = \{t_1, \ldots, t_n\}$ можно записать в следующем виде $C_U(A) = \{\omega \in \times_{t\in T}\Omega_t \colon (\omega_{t_1}, \ldots, \omega_{t_n}) \in A\}$.

Прямое произведение $\times_{t\in T}\Omega_t$ является цилиндрическим множеством. Из равенства $(C_U(A))^c = C_U(A^c)$ следует, что дополнение цилиндрического множества суть цилиндрическое множество.

1.2.16. Теорема. *Пусть* $(\times_{t\in T}\Omega_t, \otimes_{t\in T}\mathcal{F}_t)$ *– прямое произведение бесконечного числа измеримых пространств* $(\Omega_t, \mathcal{F}_t), t \in T$. *Класс* $\mathcal{A}$ *цилиндрических множеств с конечномерными основаниями является алгеброй и* $\sigma(\mathcal{A}) = \otimes_{t\in T}\mathcal{F}_t$.

► Нам уже известно, что класс $\mathcal{A}$ содержит множество $\times_{t\in T}\Omega_t$ и наряду с любым своим множеством содержит его дополнение. Чтобы доказать, что класс $\mathcal{A}$ является алгеброй, достаточно убедиться, что он содержит объединение любых двух своих представителей $C_U(A)$ и $C_V(B)$, где $U = \{t_1, \ldots, t_n\}$, $V = \{t'_1, \ldots, t'_m\}$, $A \in \otimes_{k=1}^{n}\mathcal{F}_{t_k}$ и $B \in \otimes_{k=1}^{m}\mathcal{F}_{t'_k}$. Обозначим отображения

$$\pi_1 \colon \times_{t\in U\cup V}\Omega_t \to \times_{t\in U}\Omega_t,\ \pi_2 \colon \times_{t\in U\cup V}\Omega_t \to \times_{t\in V}\Omega_t,$$

переводящие функцию ω_t, $t \in U\cup V$, в ее сужения на множества U и V соответственно. Если $\pi_1^{-1}(A), \pi_2^{-1}(B) \in \otimes_{t\in U\cup V}\mathcal{F}_t$ и выполняются равенства $C_{U\cup V}(\pi_1^{-1}(A)) = C_U(A)$ и $C_{U\cup V}(\pi_2^{-1}(B)) = C_V(B)$, то

$$C_U(A) \cup C_V(B) = C_{U\cup V}(\pi_1^{-1}(A)) \cup C_{U\cup V}(\pi_2^{-1}(B)) = \\ = C_{U\cup V}(\pi_1^{-1}(A) \cup \pi_2^{-1}(B)) \in \mathcal{A}.$$

Докажем соотношения, которыми мы воспользовались. Обозначим $\mathcal{L}$ класс множеств $A \in \otimes_{t\in U}\mathcal{F}_t$, для которых $\pi_1^{-1}(A) \in \otimes_{t\in U\cup V}\mathcal{F}_t$ и $C_{U\cup V}(\pi_1^{-1}(A)) = C_U(A)$. Класс $\mathcal{L}$ содержит произвольный измеримый прямоугольник $D = \times_{k=1}^{n} D_{t_k}$, так как $\pi_1^{-1}(D) = \times_{t\in U\cup V} C_t$, где

$C_t = D_{t_k}$ для всех $t = t_k \in U$ и $C_t = \Omega_k$ для всех $t = t_k \notin U$. Множества $C_{U \cup V}(\times_{t \in U \cup V} C_t)$ и $C_U(\times_{k=1}^{m} D_{t_k})$ совпадают по определению цилиндрического множества. Нетрудно убедиться, что класс $\mathcal{L}$ является σ-алгеброй. Алгебра $\mathcal{A}$ содержится в $\otimes_{t \in T} \mathcal{F}_t$ и содержит любой прямоугольник $\times_{t \in T} A_t$ со сторонами $A_t \in \mathcal{F}_t, A_t = \Omega_t$ для всех $t \in T$ за исключением конечного числа. Поэтому $\sigma(\mathcal{A}) = \otimes_{t \in T} \mathcal{F}_t$. ◀

1.2.17. Теорема. *Пусть* $(\times_{t \in T} \Omega_t, \otimes_{t \in T} \mathcal{F}_t)$ *– прямое произведение несчетного числа измеримых пространств* $(\Omega_t, \mathcal{F}_t), t \in T$. *Множество* $B \subseteq \times_{t \in T} \Omega_t$ *принадлежит сигма-алгебре* $\otimes_{t \in T} \mathcal{F}_t$ *тогда и только тогда, когда оно является цилиндрическим множеством* $B = C_U(A)$ *с конечномерным или счетно-конечным основанием* A.

▶ Обозначим $\mathcal{L}$ класс цилиндрических множеств с конечномерными или счетно конечными основаниями. Убедимся, что класс $\mathcal{L}$ является сигма-алгеброй. Заметим, что прямое произведение $\times_{t \in T} \Omega_t$ принадлежит классу $\mathcal{L}$. Из знакомого равенства $(C_U(A))^c = C_U(A^c)$ следует, что класс $\mathcal{L}$ содержит дополнение B^c любого множества $B \in \mathcal{L}$. Докажем, что класс $\mathcal{L}$ содержит объединение любого счетного числа своих множеств. Пусть $C_{U_n}(A_n) \in \mathcal{L}, n \in \mathbb{N}$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ множество U_n конечно или счетно. Поэтому их объединение $U = \cup_{n=1}^{\infty} U_n$ является конечным или счетным множеством. Обозначим $\pi_n \colon \times_{t \in U} \Omega_t \to \times_{t \in U_n} \Omega_t$ отображение, переводящее функцию $\omega_t, t \in U$, в ее сужение $\omega_t, t \in U_n$. С помощью знакомых рассуждений (см. доказательство теоремы 1.2.16) можно убедиться, что $\pi_n^{(-1)}(A_n) \in \otimes_{t \in U} \mathcal{F}_t$ и $C_U(\pi_n^{(-1)}(A_n)) = C_{U_n}(A_n)$ и, следовательно,

$$\cup_{n=1}^{\infty} C_{U_n}(A_n) = \cup_{n=1}^{\infty} C_U(\pi_n^{(-1)}(A_n)) = C_U(\cup_{n=1}^{\infty} \pi_n^{(-1)}(A_n)) \in \mathcal{L}.$$

Тем самым доказано, что класс $\mathcal{L}$ является сигма-алгеброй.

Все цилиндрические множества с конечномерными основаниями принадлежат классу $\mathcal{L}$. Поэтому $\otimes_{t \in T} \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{L}$. Осталось доказать, что произвольное множество $B = C_U(A) \in \mathcal{L}$ принадлежит сигма-алгебре $\otimes_{t \in T} \mathcal{F}_t$. Если множество U конечно, то утверждение очевидным образом справедливо. Далее предполагается, что множество U счетно. Обозначим $\mathcal{L}_U$ класс множеств $A \in \otimes_{t \in U} \mathcal{F}_t$ таких, что $C_U(A) \in \otimes_{t \in T} \mathcal{F}_t$. Класс $\mathcal{L}_U$ является сигма-алгеброй. В этом можно убедиться с помощью знакомых рассуждений. Действительно, $\times_{t \in T} \Omega_t \in \mathcal{L}_U$, так как $C_U(\times_{t \in U} \Omega_t) = \times_{t \in T} \Omega_t \in \otimes_{t \in T} \mathcal{F}_t$. Если $A \in \mathcal{L}_U$, то $A^c \in \mathcal{L}_U$, так как $C_U(A^c) = (C_U(A))^c \in \otimes_{t \in T} \mathcal{F}_t$. Если

$A_n \in \mathcal{L}_U$, $n \in \mathbb{N}$, то $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{L}_U$, так как

$$C_U(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \cup_{n=1}^{\infty} C_U(A_n) \in \otimes_{t\in T}\mathcal{F}_t.$$

Класс $\mathcal{L}_U$ содержит все измеримые прямоугольники $\times_{t\in U} C_t$ со сторонами $C_t \in \mathcal{F}_t$. Чтобы убедиться в этом, запишем U в виде последовательности $\{t_m\}_{m\geq 1}$. Для любого натурального числа m прямоугольник $D_m = \times_{k=1}^{m} C_k \times \times_{t\in T\setminus\{1,\dots,t_m\}} \Omega_t$ принадлежит $\mathcal{L}_U$, так как $C_U(D_m) \in \otimes_{t\in T}\mathcal{F}_t$. Заметим, что $C_U(D_m)$ является цилиндрическим множеством с конечномерным основанием. Так как $\times_{t\in U} C_t = \cap_{m=1}^{\infty} D_m$, то $\times_{t\in U} C_t \in \mathcal{L}_U$. Класс $\mathcal{L}_U$ является сигма-алгеброй и содержит все упомянутые прямоугольники $\times_{t\in U} C_t$. Поэтому $\otimes_{t\in U}\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{L}_U$. Это означает, что любое множество $B = C_U(A)$ с основанием $A \in \otimes_{t\in U}\mathcal{F}_t$ принадлежит сигма-алгебре $\otimes_{t\in T}\mathcal{F}_t$. ◄

1.2.18. Пример. Существуют множества, не принадлежащие прямому произведению σ-алгебр. Положим $T = [0,1], \Omega_t = [0,2]$ и $\mathcal{F}_t = \mathcal{B}([0,2])$, где $\mathcal{B}([0,2])$ обозначает σ-алгебру борелевских подмножеств сегмента $[0,2]$. Убедимся, что «естественное» множество $B = \{\omega \in \otimes_{t\in T}\Omega_t \colon \sup_{t\in T}\omega_t = 1\}$ не принадлежит σ-алгебре $\otimes_{t\in T}\mathcal{F}_t$. Предположим противное, что $B \in \otimes_{t\in T}\mathcal{F}_t$. По теореме 1.2.17 найдутся последовательность $U = \{t_n\}_{n\geq 1}$ чисел $t_n \in [0,1]$ и множество $A \in \otimes_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}_{t_n}$ такие, что $B = C_U(A)$. Пусть функция $\omega_t, t \in T$, принадлежит B. Функция $\omega'_t, t \in T$, со значениями $\omega'_{t_n} = \omega_{t_n}, n \in \mathbb{N}$, и $\omega'_t = 2$ для всех $t \in T \setminus U$ принадлежит B. Это ведет к противоречию, так как $\sup_{t\in T}\omega'_t = 2$.

1.3. Аксиома выбора

Во многих разделах математики можно встретить утверждения, доказательства которых сводятся к выбору некоторого числа определенных объектов из общего числа исследуемых объектов. Сам процесс выбора объектов может показаться неубедительным и противоречить привычной логике рассуждений. Чтобы преодолеть противоречия, возникающие в подобных ситуациях, Цермело (Ernst Fridrich Ferdinand Zermelo) предложил специальный *принцип выбора,* в последствии получивший название *аксиомы выбора.* Оказалось, что многие известные утверждения из теории множеств и математического анализа теряют свою силу без предположения о справедливости аксиомы выбора. С другой стороны, принятие аксиомы выбора может привести к неожиданным выводам. Примером необычного следствия аксиомы выбора может служить известный парадокс Банаха-Тарского. Назовем два множества $A, B \subseteq \mathbb{R}^3$ *равносоставленными,* если их можно представить в виде объединений $A = \cup_{k=1}^{n} A_k$ и $B = \cup_{k=1}^{n} B_k$ попарно конгруэнтных множеств A_k и B_k. Парадокс состоит в том, что шар в трехмерном пространстве можно разделить на пять частей, из которых можно составить два шара, равносоставленных с данным шаром. Доказательство этого утверждения основано на использовании аксиомы выбора. По этой причине некоторые математики рассматривали парадокс Банаха-Тарского в качестве доказательства несостоятельности аксиомы выбора. В настоящее время аксиома выбора признается большинством математиков по следующим причинам. Имеется большое число частных случаев, когда аксиома может быть доказана. Из огромного числа следствий аксиомы выбора ни одно не привело к противоречию. Аксиома выбора оказалась необходимым математическим инструментом при доказательстве большого числа глубоких утверждений.

1.3.1. Аксиома выбора. *Для любого непустого класса $\mathcal{L}$ попарно непересекающихся непустых множеств существует множество M, пересечение $M \cap A$ которого с каждым множеством $A \in \mathcal{L}$ содержит ровно одну точку.*

Смысл аксиомы выбора состоит в том, что для любого непустого класса $\mathcal{L}$ попарно непересекающихся множеств существует правило f, которое каждому множеству $A \in \mathcal{L}$ ставит в соответствие определенную точку $f(A) \in A$. Правило f часто называют *функцией выбора.* Аксиома выбора справедлива, если класс $\mathcal{L}$ содержит одно непустое множество A, так как в этом случае она сводится к определению непустого множества.

Необходимость в аксиоме выбора возникает, например, при доказательстве эквивалентности определений непрерывности в точке функции вещественного переменного в смысле Коши и в смысле Гейне. Напротив, стандартное доказательство эквивалентности определений непрерывности на интервале функции вещественного переменного в смысле Коши и в смысле Гейне является логически безупречным и не нуждается в аксиоме выбора. В качестве примера ниже приведено доказательство теоремы 1.1.7 с использованием аксиомы выбора. В теореме, в частности, идет речь об объединении множеств. Ранее объединение множеств было определено для множеств, которые являются подмножествами некоторого данного множества. Это определение объединения $\cup_{t\in T} A_t$ сохраняет свой смысл для любого числа произвольных множеств $A_t, t \in T$, как множество точек, принадлежащих по крайней мере одному из множеств $A_t, t \in T$. Именно оно используется в доказательстве теоремы 1.1.7.

Доказательство теоремы 1.1.7. Предполагается, что справедлива следующая *ослабленная* аксиома выбора. Для любой последовательности $\{A_n\}_{n\geq 1}$ попарно непересекающихся непустых множеств существует последовательность $M = \{a_n\}_{n\geq 1}$ точек $a_n \in A_n$ такая, что $M \cap A_n = \{a_n\}$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

(i). *Любое бесконечное множество A содержит счетное подмножество.* Обозначим $\mathcal{A}_n$ класс всех подмножеств множества A, каждое из которых содержит ровно 2^n точек. Классы $\mathcal{A}_n, n \in \mathbb{N}$, попарно не пересекаются, так как различные классы состоят из множеств различной мощности (множества из различных классов состоят из различного числа точек). По ослабленной аксиоме выбора существует последовательность $\{A_n\}_{n\geq 1}$, состоящая из представителей $A_n \in \mathcal{A}_n$. Обозначим $A'_1 = A_1, A'_{n+1} = A_{n+1} \setminus \cup_{k=1}^n A_k$. Множества $A'_n, n \in \mathbb{N}$, попарно не пересекаются. Каждое из них содержит по крайней мере одну точку, так как A_n содержит 2^n точек и $2^n - 2^{n-1} - \cdots - 2^0 = 1$. К последовательности $\{A'_n\}_{n\geq 1}$ можно применить ослабленную аксиому выбора, согласно которой существует последовательность $\{a_n\}_{n\geq 1} \subseteq A$ различных точек $a_n \in A'_n$.

(ii). *Любое подмножество B счетного множества A конечно или счетно.* Если B является конечным множеством, то утверждение доказано. Требуется доказать, что множество B счетно, если оно бесконечно. Множество A можно записать в виде последовательности $A = \{a_k\}_{k\geq 1}$. Определим последовательность $\{m_n\}_{n\geq 1}$ натуральных чисел по следуюшему правилу: $m_1 = \inf\{k \in \mathbb{N} \colon a_k \in B\}$ и $m_{n+1} = \inf\{k \in \mathbb{N} \setminus \{m_1, \ldots, m_n\} \colon a_k \in B\}$. Это правило корректно, так как любое множество натуральных чисел содержит свое наименьшее число. Заметим, что $a_{m_n} \in B$. Так как множество B содержит бесконечное число точек, то $\lim_{n\to\infty} m_n = \infty$. Кроме того, справедливы неравенства $n \leq m_n$ и $m_n < m_{n+1}$. Убедимся, что последовательность $\{a_{m_n}\}_{n\geq 1}$ содержит множество B. Предположим противное, что некоторая точка $a \in B$ не принадлежит последовательности $\{a_{m_n}\}_{n\geq 1}$. Точка a имеет свой номер $a = a_r$ в последовательности $A = \{a_k\}_{n\geq 1}$. Найдется $n(r) \in \mathbb{N}$ такое, что $m_{n(r)} \leq r < m_{n(r)+1}$. Так как $a = a_r \notin \{a_{m_n}\}_{n\geq 1}$, то $m_{n(r)} < r < m_{n(r)+1}$. Это противоречит правилу построения чисел $m_n, n \in \mathbb{N}$, согласно которому должно быть $r = m_{n(r)+1}$. Тем самым доказано равенство $B = \{a_{m_n}\}_{n\geq 1}$. Из приведенных рассуждений следует, что отображение $f\colon \mathbb{N} \to B$, $f(n) = a_{m_n}$, является взаимно однозначным, и, следовательно, B является счетным множеством.

(iii). *Объединение* $A = \cup_{n=1}^{n} A_n$ *счетного числа счетных множеств счетно.* Предположим, что множества $A_n, n \in \mathbb{N}$, попарно не пересекаются. Обозначим $\mathcal{A}_n$ множество всех взаимно однозначных отображений $f\colon \mathbb{N} \to A_n$. Множества $\mathcal{A}_n, n \in \mathbb{N}$, попарно не пересекаются, так как отображения из разных множеств $\mathcal{A}_n$ отображают натуральный ряд в разные множества. Каждое из множеств $\mathcal{A}_n$ содержит по крайней мере одно отображение, так как множество A_n счетно. По ослабленной аксиоме выбора найдется последовательность $\{f_n\}_{n\geq 1}$ представителей $f_n \in \mathcal{A}_n$. Определим функцию $\phi\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A$, положив $\phi(n, m) = f_n(m)$. Функция ϕ взаимно однозначно отображает прямое произведение $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ на множество A. Возьмем взаимно однозначное отображение $\psi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Суперпозиция $\phi \circ \psi = \phi(\psi)\colon \mathbb{N} \to A$ взаимно однозначно отображает натуральный ряд $\mathbb{N}$ на множество A.

Некоторые из множеств $A_n, n \in \mathbb{N}$, могут иметь общие точки. Поэтому вместо A_n можно взять $A'_n = \{n\} \times A_n$. Множества $A'_n, n \in \mathbb{N}$, попарно не пересекаются. По доказанному выше объединение $\cup_{n=1}^{\infty} \{n\} \times A_n$ является счетным множеством. Для любой точки $a \in A$ найдется наименьшее $n = n_a \in \mathbb{N}$ такое, что $a \in A_n$. Поставим точке a в соответствие точку $(n, a) \in \{n\} \times A_n$. Различным точкам $a, b \in A$ соответствуют различные точки (n_a, a) и (n_b, b). Это означает, что между множеством A и его образом A' имеется взаимно однозначное соответствие. Множество A' является бесконечным. По утверждению (ii) оно счетно, и, следовательно, A является счетным множеством.

(iv). *Объединение* $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ *счетного числа конечных множеств конечно или счетно.* Множество A может быть конечным или бесконечным. Требуется доказать, что множество A счетно, если оно бесконечно. Каждое множество $A_n = \{a_1, \ldots, a_{m_n}\}$ можно вложить в счетное множество $A'_n = \{a_1, \ldots, a_{m_n}, m_n + 1, m_n + 2, \ldots\}$. Множество A является подмножеством объединения $A' = \cup_{n=1}^{\infty} A'_n$ счетного числа счетных множеств. По доказанному в (iii) множество A' счетно. По утверждению (ii) множество A счетно.

(v). *Прямое произведение* $\times_{k=1}^{d} A_k$ *конечного числа счетных множеств счетно.* В соответствии с определением счетного множества для каждого $k = 1, \dots, d$ найдется взаимно однозначное соотвествие $f_k \colon \mathbb{N} \to A_k$. Обозначим $\mathbb{N}^d$ прямое произведение d копий натурального ряда. Отображение $f = (f_1, \dots, f_d) \colon \mathbb{N}^d \to \times_{k=1}^{d} A_k$ является взаимно однозначным. Поэтому прямое произведение $\times_{k=1}^{d} A_k$ счетно, если множество $\mathbb{N}^d$ счетно. В том, что множество $\mathbb{N}^d$ счетно, можно убедиться по индукции. ◄

1.4. Функции множеств

В этом параграфе собраны необходимые сведения о вещественных функциях, определенных на произвольной алгебре $\mathcal{A} \subseteq 2^{\Omega}$. Напомним, что 2^{Ω} обозначает класс всех подмножеств множества Ω.

1.4.1. Определение. Функция $\mu \colon \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *зарядом,* если она принимает только одно из значений $\pm\infty$, $\mu\{\varnothing\} = 0$, *счетно аддитивна:* $\mu\{\cup_{n=1}^{\infty} A_n\} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\{A_n\}$ для любых попарно непересекающихся множеств $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, таких, что $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$. Заряд μ называется *конечным,* если $|\mu\{A\}| < \infty$ для любого $A \in \mathcal{A}$. Заряд μ называется *счетно конечным,* если существуют множества $A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}$, такие, что $\Omega = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ и $|\mu\{A_n\}| < \infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Неотрицательный заряд называется *мерой.*

Любой заряд μ обладает свойством *конечной аддитивности*: для любых попарно непересекающихся множеств $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ выполняется равенство $\mu\{\cup_{k=1}^{n} A_k\} = \sum_{k=1}^{n} \mu\{A_k\}$.

1.4.2. Теорема. *Пусть заряд* $\mu \colon \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ *определен на некоторой алгебре* $\mathcal{A} \subseteq 2^{\Omega}$. *Если* $A \in \mathcal{A}$ *и* $|\mu\{A\}| < \infty$, *то* $|\mu\{B\}| < \infty$ *для любого* $B \in \mathcal{A}, B \subset A$.

► Слагаемые справа в равенстве $\mu\{A\} = \mu\{B\} + \mu\{A \setminus B\}$ не могут принимать бесконечные значения. Если по крайней мере одно из слагаемых равно бесконечности, то $|\mu\{A\}| = \infty$. ◄

1.4.3. Теорема. *Любой заряд* $\mu \colon \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ *обладает свойствами:*
(i) *если* $\mathcal{A} \ni A_n \uparrow, A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, *то* $\mu\{A\} = \lim_{n\to\infty} \mu\{A_n\}$,
(ii) *если* $\mathcal{A} \ni A_n \downarrow, A = \cap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}, |\mu\{A_m\}| < \infty$ *для некоторого* $m \in \mathbb{N}$, *то* $\mu\{A\} = \lim_{n\to\infty} \mu\{A_n\}$.

► Свойство (i) называется свойством *непрерывности снизу* заряда μ. С целью доказать (i) заметим, что множества $B_1 = A_1$,

$B_n = A_n \setminus A_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, принадлежат $\mathcal{A}$, попарно не пересекаются и справедливы равенства $\cup_{n=1}^{\infty} B_n = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ и $\cup_{k=1}^{n} B_k = A_n$. Из свойства счетной аддитивности заряда следует, что

$$\mu\{\cup_{n=1}^{\infty} A_n\} = \mu\{\cup_{n=1}^{\infty} B_n\} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\{B_n\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu\{B_k\} = \lim_{n\to\infty} \mu\{\cup_{k=1}^{n} B_k\} = \lim_{n\to\infty} \mu\{A_n\}.$$

Свойство (ii) называется свойством *непрерывности сверху* заряда μ. Оно следует из утверждения (i). Достаточно применить (i) к возрастающей последовательности $\{A_m \setminus A_n\}_{n\geq m+1}$. ◄

Свойство (ii) выполняется, в частности, для любой убывающей последовательности $\{A_n\}_{n\geq 1}$ множеств $A_n \in \mathcal{A}$ с пустым пересечением $\cap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$. В этом случае оно называется свойством *непрерывности сверху* заряда μ на пустом множестве.

1.4.4. Теорема. *Конечно аддитивная функция* $\mu\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, *определенная на некоторой алгебре* $\mathcal{A} \subseteq 2^{\Omega}$, *является зарядом тогда и только тогда, когда она непрерывна сверху на пустом множестве.*

► Заметим, что функция μ не принимает бесконечных значений. В силу предыдущей теоремы требуется доказать только достаточность условия. Так как $\mu\{\varnothing\} = \mu\{\varnothing\} + \mu\{\varnothing\}$ и $|\mu\{\varnothing\}| < \infty$, то $\mu\{\varnothing\} = 0$. Пусть $A_n \in \mathcal{A}, A_n \cap A_m = \varnothing, n \neq m$. Обозначим $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$. Из соотношений $B_n = A \setminus \cup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}, B_n \downarrow$, $\cap_{n=1}^{\infty} B_n = \varnothing$, свойства конечной аддитивности и непрерывности сверху функции μ на пустом множестве следует, что

$$0 = \lim_{n\to\infty} \mu\{B_n\} = \lim_{n\to\infty} \big(\mu\{A\} - \sum_{k=1}^{n} \mu\{A_k\}\big) = \mu\{A\} - \sum_{k=1}^{\infty} \mu\{A_k\}. \quad ◄$$

1.4.5. Теорема. *Любая мера* $\mu\colon \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, *определенная на некоторой алгебре* $\mathcal{A} \subseteq 2^{\Omega}$, *обладает следующими свойствами:*
(i) *если* $A, B \in \mathcal{A}$ *и* $A \subset B$, *то* $\mu\{A\} \leq \mu\{B\}$;
(ii) *если* $A, B \in \mathcal{A}$, *то* $\mu\{A \cup B\} \leq \mu\{A\} + \mu\{B\}$;
(iii) *если* $A_n \in \mathcal{A}, A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, *то* $\mu\{A\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu\{A_n\}$.

► Свойства (i) и (ii) называются свойством *монотонности* и свойством *полуаддитивности* меры. Они являются следствиями равенства $\mu\{B\} = \mu\{A\} + \mu\{B \setminus A\}$. Свойство (iii) называется свойством *счетной полуаддитивности* меры. Заметим, что множества

$B_1 = A_1, B_n = A_n \setminus \cup_{k=1}^{n-1} A_k$, $n \geq 2$, принадлежат $\mathcal{A}$. Они попарно не пересекаются, $B_n \subset A_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\cup_{n=1}^{\infty} B_n = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Отсюда и из (i) следует, что $\mu\{\cup_{n=1}^{\infty} A_n\} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\{B_n\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu\{A_n\}$. ◀

1.4.6. Теорема. *Пусть заряд* $\mu\colon \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}$ *определен на некоторой сигма-алгебре* $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$. *Предположим, что* $\mathcal{F}$ *порождена некоторым* π*-классом* $\mathcal{C}$ *и существуют попарно непересекающиеся множества* $E_n \in \mathcal{C}$, $n \in \mathbb{N}$, *такие, что* $\Omega = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ *и* $|\mu\{E_n\}| < \infty$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$. *Тогда заряд* μ *однозначно определяется своими значениями на множествах из* $\mathcal{C}$.

▶ Требуется доказать равенство $\mu = \nu$, если ν – другой заряд, определенный на $\mathcal{F}$, такой, что $\nu\{A\} = \mu\{A\}$ для всех $A \in \mathcal{C}$. Достаточно доказать равенство $\mu\{A \cap E_n\} = \nu\{A \cap E_n\}$ для любых $A \in \mathcal{F}$ и $n \in \mathbb{N}$, так как $\mu\{A\} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\{A \cap E_n\}$ и $\nu\{A\} = \sum_{n=1}^{\infty} \nu\{A \cap E_n\}$.

С помощью теоремы 1.2.8 совсем просто можно убедиться, что классы $\mathcal{F}_n = \{A \cap E_n \colon A \in \mathcal{F}\}$ и $\mathcal{C}_n = \{A \cap E_n \colon A \in \mathcal{C}\}$ являются σ-алгеброй и π-классом соответственно. По следствию 1.2.13 выполняется равенство $\mathcal{F}_n = \sigma(\mathcal{C}_n)$. Заряды $\mu, \nu\colon \mathcal{F}_n \to \mathbb{R}$ принимают конечные значения и по предположению совпадают на π-классе $\mathcal{C}_n$. Нетрудно видеть, что класс $\mathcal{L}_n = \{A \in \mathcal{F}_n \colon \mu\{A\} = \nu\{A\}\}$ является λ-классом. Он содержит π-класс $\mathcal{C}_n$. По теореме 1.2.7 выполняется равенство $\mathcal{F}_n = \sigma(\mathcal{C}_n)$. Тем самым требуемое равенство $\mu\{A \cap E_n\} = \nu\{A \cap E_n\}$ для любого $A \in \mathcal{F}$ доказано. ◀

Каждый заряд можно представить в виде разности двух мер, одна из которых конечна. Доказательство этого утверждения основано на понятии положительного (отрицательного) множества.

1.4.7. Определение. Пусть заряд $\mu\colon \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}$ определен на некоторой σ-алгебре $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$. Множество $A \in \mathcal{F}$ называется *положительным* (*отрицательным*) относительно μ, если $\mu\{A \cap E\} \geq 0$ ($\mu\{A \cap E\} \leq 0$) для любого $E \in \mathcal{F}$.

Ради сокращения речи, упоминание о заряде будет опускаться. Заметим, что пустое множество является положительным и отрицательным. Пересечение и разность двух положительных множеств, а также объединение любого конечного или счетного числа попарно непересекающихся положительных множеств являются положительными множествами. Отсюда следует, что объединение любого конечного или счетного числа положительных множеств является положительным множеством.

1.4.8. Теорема. *Пусть заряд* $\mu\colon \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}$ *определен на неко-*

торой сигма-алгебре $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$. *Тогда существует положительное множество* $A \in \mathcal{F}$ *относительно* μ *такое, что его дополнение* A^c *является отрицательным множеством относительно* μ.

► Заряд μ не может принимать одно из значений $\pm\infty$. Предположим, например, что заряд μ не может принимать значение ∞. Это предположение не ограничивает общности рассуждений. Действительно, если заряд μ не принимает значение $-\infty$, то вместо μ можно взять заряд $-\mu$, который не принимает значения ∞. Доказательство будет разбито на несколько этапов.

(i). Пусть дано множество $E \in \mathcal{F}$ такое, что $|\mu\{E\}| < \infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется множество $E' \in \mathcal{F}$ такое, что $E' \subseteq E$, $\mu\{E'\} \geq \mu\{E\}$ и $\mu\{A\} > -\varepsilon$ для любого $A \in \mathcal{F}, A \subset E'$. Предположим противное, что такого множества E' не существует. Тогда найдется $E_1 \subset E$ такое, что $\mu\{E_1\} \leq -\varepsilon$. Так как $|\mu\{E\}| < \infty$, то $|\mu\{E_1\}| < \infty$ и $|\mu\{E \setminus E_1\}| < \infty$ по теореме 1.4.2. В силу равенства $\mu\{E\} = \mu\{E_1\} + \mu\{E \setminus E_1\}$ выполняется неравенство $\mu\{E \setminus E_1\} \geq \mu\{E\}$. Так как $E \setminus E_1 \in \mathcal{F}$ и $E \setminus E_1 \subset E$, то найдется $E_2 \subseteq E \setminus E_1$ такое, что $\mu\{E_2\} \leq -\varepsilon$. Рассуждая подобным образом, можно построить последовательность $\{E_n\}_{n\geq 1}$ попарно непересекающихся множеств таких, что $\mu\{E_n\} \leq -\varepsilon$ и $E_n \subset E$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Объединение $E'' = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ принадлежит E. Поэтому $|\mu\{E''\}| < \infty$. Это противоречит тому, что $\mu\{E''\} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\{E_n\} = -\infty$. Тем самым доказано существование требуемого множества E'.

(ii). Пусть дано произвольное множество $E \in \mathcal{F}$ такое, что $|\mu\{E\}| < \infty$. Тогда найдется положительное множество $E' \in \mathcal{F}$ такое, что $\mu\{E'\} \geq \mu\{E\}$. Можно считать, что E не является положительным множеством. В противном случае утверждение выполняется с $E' = E$. Обозначим $E_1 = E$. По доказанному в (i) найдется $E_2 \in \mathcal{F}$ такое, что $E_2 \subset E_1, \mu\{E_2\} \geq \mu\{E_1\}$ и $\mu\{A\} > -1/2$ для любого $A \in \mathcal{F}, A \subset E_2$. С помощью подобных рассуждений можно построить последовательность $\{E_n\}_{n\geq 1}$ измеримых множеств таких, что $E_{n+1} \subset E_n, \mu\{E_{n+1}\} \geq \mu\{E_n\}$ и $\mu\{A\} > -1/(n+1)$ для любого $A \in \mathcal{F}, A \subset E_{n+1}$. Обозначим $E' = \cap_{n=1}^{\infty} E_n$ и заметим, что $E' \subset E$. Если $A \in \mathcal{F}$ и $A \subset E'$, то $A \in E_{n+1}$ и $\mu\{A\} \geq -1/(n+1)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Отсюда следует, что $\mu\{A\} \geq 0$. Это означает, что E' является положительным множеством. К убывающей последовательности $\{E_n\}_{n\geq 1}$ применима теорема 1.4.3, по которой $\mu\{E'\} = \lim_{n\to\infty} \mu\{E_n\}$. Так как $\mu\{E_{n+1}\} \geq \mu\{E_n\} \geq \mu\{E_1\} = \mu\{E\}$, то $\mu\{E'\} \geq \mu\{E\}$. Требуемое множество E' построено.

(iii). Обозначим $\alpha = \sup\{\mu\{E\}\colon E \in \mathcal{F}\}$. Так как $\mu\{\varnothing\} = 0$, то $0 \leq \alpha$. Существует последовательность $\{E_n\}_{n\geq 1}$ множеств $E_n \in \mathcal{F}$ такая, что $\mu\{E_n\} \to \alpha$ при $n \uparrow \infty$. По доказанному в (ii) для любого $n \in \mathbb{N}$ существует положительное множество $A_n \in \mathcal{F}$ такое, что $A_n \subseteq E_n$ и $\mu\{A_n\} \geq \mu\{E_n\}$. Объединение $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ счетного числа положительных множеств является положительным множеством. Так как $\mu\{A\} = \mu\{A_n\} + \mu\{A \backslash A_n\} \geq \mu\{A_n\}$ и $\mu\{A_n\} \geq \mu\{E_n\}$, то $\mu\{A\} \geq \alpha$. По определению α выполняется неравенство $\mu\{A\} \leq \alpha$, и, следовательно, $\mu\{A\} = \alpha$. По предположению функция μ не принимает значения ∞. Поэтому $\alpha = \mu\{A\} < \infty$. Убедимся, что $B = A^c$ является отрицательным множеством. Если $\mu\{C\} > 0$ для некоторого $C \in \mathcal{F}, C \subseteq B$, то $\mu\{A \cup C\} = \mu\{A\} + \mu\{C\} > \alpha$. Это противоречит определению величины α, и, следовательно, $\mu\{C\} \leq 0$. Это означает, что B является отрицательным множеством. ◀

Представление множества Ω в виде объединения $\Omega = A \cup A^c$ положительного множества A и отрицательного множества A^c называется *разложением Хана* (Hans Hahn).

1.4.9. Теорема. *Пусть заряд* $\mu\colon \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}$ *определен на некоторой* σ*-алгебре* $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$. *Тогда существуют меры* $\mu^+, \mu^-\colon \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, *одна из которых конечна, такие, что* $\mu = \mu^+ - \mu^-$. *Если заряд* μ *является конечным* (*счетно-конечным*), *то меры* μ^+ *и* μ^- *и их сумма* $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$ *конечны* (*одна мера конечна, а другая мера счетно-конечна*).

▶ Запишем Ω в виде объединения $\Omega = A \cup A^c$ положительного множества A и отрицательного множества A^c относительно заряда μ. Предположим, например, что заряд μ не принимает значение ∞. Определим меры $\mu^+, \mu^-\colon \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, положив

$$\mu^+\{E\} = \mu\{E \cap A\}, \mu^-\{E\} = -\mu\{E \cap A^c\}, E \in \mathcal{F}.$$

Мера μ^+ конечна. Требуемое равенство $\mu\{E\} = \mu^+\{E\} - \mu^-\{E\}$ для любого $E \in \mathcal{F}$ выполняется в силу аддитивности заряда μ. Если заряд μ не принимает бесконечные значения, то по теореме 1.4.2 меры $\mu^+, \mu^-, |\mu|$ конечны. Предположим, что заряд μ обладает свойством счетной конечности. Существуют множества $E_n \in \mathcal{F}, n \in \mathbb{N}$, такие, что $\Omega = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ и $|\mu\{E_n\}| < \infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$. По теореме 1.4.2 величины $\mu^+\{E_n\}$ и $\mu^-\{E_n\}$ конечны для всех $n \in \mathbb{N}$, другими словами, меры $\mu^-, |\mu|$ счетно-конечны, а мера μ^+ конечна. ◀

Представление заряда μ в виде разности $\mu = \mu^+ - \mu^-$ называется *разложением Жордана* (Marie Ennemond Camille Jordan).

1.4.10. Определение. Тройка $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, состоящая из некоторого множества Ω, некоторой сигма-алгебры $\mathcal{F} \subseteq 2^\Omega$ и некоторой меры $\mu\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}_+$, называется *пространством с мерой.* Пространство с мерой называется *полным,* если $2^A \subseteq \mathcal{F}$ для любого множества $A \in \mathcal{F}$ нулевой меры μ.

Любое пространство с мерой можно пополнить.

1.4.11. Теорема. *Пусть дано пространство с мерой* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. *Обозначим класс* $\mathcal{F}'$ *множеств вида* $A \cup B$, *где* $A \in \mathcal{F}$ *и* B *является любым подмножеством некоторого множества* $D \in \mathcal{F}$ *нулевой меры. Определим функцию* $\mu'\colon \mathcal{F}' \to \overline{\mathbb{R}}_+$, *положив* $\mu'\{A \cup B\} = \mu\{A\}$. *Тогда* $(\Omega, \mathcal{F}', \mu')$ *является полным пространством с мерой.*

► Докажем, что класс $\mathcal{F}'$ является сигма-алгеброй. Заметим, что $\Omega \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$. Пусть $A \cup B \in \mathcal{F}'$, где $A \in \mathcal{F}, B \subseteq D \in \mathcal{F}, \mu\{D\} = 0$. Из равенств $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c = (A^c \cap D^c) \cup (A^c \cap B^c \cap D)$ и включений $A^c \cap D^c \in \mathcal{F}, A^c \cap B^c \cap D \subseteq D$ следует, что $(A \cup B)^c \in \mathcal{F}'$.

Пусть $A_n \cup B_n \in \mathcal{F}', n \in \mathbb{N}$, где $A_n \in \mathcal{F}, B_n \subseteq D_n \in \mathcal{F}$, $\mu\{D_n\} = 0$. Тогда $\cup_{n=1}^\infty (A_n \cup B_n) = (\cup_{n=1}^\infty A_n) \cup (\cup_{n=1}^\infty B_n) \in \mathcal{F}'$, так как $\cup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{F}, \cup_{n=1}^\infty B_n \subseteq \cup_{n=1}^\infty D_n \in \mathcal{F}, \mu\{\cup_{n=1}^\infty D_n\} = 0$.

Докажем, что функция $\mu'\colon \mathcal{F}' \to \overline{\mathbb{R}}_+$ является мерой. Если множества $A_n \cup B_n \in \mathcal{F}', n \in \mathbb{N}$, где $A_n \in \mathcal{F}, B_n \subseteq D_n \in \mathcal{F}, \mu\{D_n\} = 0$, попарно не пересекаются, то

$$\mu'\{\cup_{n=1}^\infty (A_n \cup B_n)\} = \mu\{\cup_{n=1}^\infty A_n\} = \sum_{n=1}^\infty \mu\{A_n\} = \sum_{n=1}^\infty \mu'\{A_n \cup B_n\}.$$

Проверим свойство полноты пространства с мерой $(\Omega, \mathcal{F}', \mu')$. Пусть $A \subseteq B \cup C \in \mathcal{F}'$ и $\mu'\{B \cup C\} = 0$, где $B \in \mathcal{F}, C \subseteq D \in \mathcal{F}, \mu\{D\} = 0$. Тогда $A \in \mathcal{F}'$, так как $\mu\{B\} = \mu'\{B \cup C\} = 0, A = \varnothing \cup A, \varnothing \in \mathcal{F}$, $A \subseteq B \cup D \in \mathcal{F}, \mu\{B \cup D\} = 0$. ◄

Предположим, что мера определена на некотором классе множеств. Возникает естественный вопрос о продолжении этой меры на более богатый класс множеств. Чтобы ответить на этот вопрос, нам понадобится понятие внешней меры.

1.4.12. Определение. Функция $\mu^*\colon 2^\Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ называется *внешней мерой*, если $\mu^*\{\varnothing\} = 0$, выполняется свойство *монотонности:* $\mu^*\{A\} \leq \mu^*\{B\}$ для любых $A, B \in 2^\Omega, A \subset B$, и выполняется свойство счетной *полуаддитивности:* $\mu^*\{\cup_{n=1}^\infty A_n\} \leq \sum_{n=1}^\infty \mu^*\{A_n\}$

для любых множеств $A_n \in 2^\Omega, n \in \mathbb{N}$.

Свойство счетной полуаддитивности внешней меры влечет свойство конечной полуаддитивности: $\mu^*\{\cup_{k=1}^n A_k\} \leq \sum_{k=1}^n \mu^*\{A_k\}$ для любых множеств $A_k \in 2^\Omega, k = 1, \ldots, n$.

1.4.13. Теорема. *Пусть дана внешняя мера* $\mu^* \colon 2^\Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$. *Если* $E_n \in 2^\Omega, n \in \mathbb{N}$, *и* $\sum_{n=1}^\infty \mu^*\{E_n\} < \infty$, *то* $\mu^*\{\cap_{m=1}^\infty \cup_{n=m}^\infty E_n\} = 0$.

► Из свойств внешней меры следует, что

$$\mu^*\{\cap_{m=1}^\infty \cup_{n=m}^\infty E_n\} \leq \mu^*\{\cup_{n=m}^\infty E_n\} \leq \sum_{n=m}^\infty \mu^*\{E_n\}.$$

Остаток сходящегося ряда стремится к нулю при $m \to \infty$. ◄

1.4.14. Определение. Пусть дана внешняя мера $\mu^* \colon 2^\Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$. Множество $E \in 2^\Omega$ называется μ^*-*измеримым*, если

$$\mu^*\{A\} = \mu^*\{A \cap E\} + \mu^*\{A \cap E^c\} \tag{1.4.1}$$

для любого множества $A \in 2^\Omega$.

1.4.15. Теорема. *Пусть дана внешняя мера* $\mu^* \colon 2^\Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$. *Обозначим* $\mathcal{F}^*$ *класс всех* μ^*-*измеримых множеств* $A \in 2^\Omega$. *Тогда тройка* $(\Omega, \mathcal{F}^*, \mu^*)$ *является полным пространством с мерой.*

► Докажем, что класс $\mathcal{F}^*$ является алгеброй. Условие (1.4.1) выполняется для $E = \varnothing$ и $E = \Omega$. Если $E \in \mathcal{F}^*$, то $E^c \in \mathcal{F}^*$, так как $(E^c)^c = E$. Убедимся, что $E \cup F \in \mathcal{F}^*$, если $E, F \in \mathcal{F}^*$. Для любого $A \subseteq \Omega$ справедливы следующие равенства

$$\mu^*\{A\} = \mu^*\{A \cap E\} + \mu^*\{A \cap E^c\} =$$
$$= \mu^*\{A \cap E \cap F\} + \mu^*\{A \cap E \cap F^c\} + \mu^*\{A \cap E^c \cap F\} + \mu^*\{A \cap E^c \cap F^c\}.$$

Если подставить $A \cap (E \cup F)$ вместо A, то получится равенство

$$\begin{aligned} \mu^*\{A \cap (E \cup F)\} = \mu^*\{A \cap E \cap F\} + \\ + \mu^*\{A \cap E \cap F^c\} + \mu^*\{A \cap E^c \cap F\}. \end{aligned} \tag{1.4.2}$$

Оно позволяет переписать предыдущее равенство в следующем виде

$$\mu^*\{A\} = \mu^*\{A \cap (E \cup F)\} + \mu^*\{A \cap E^c \cap F^c\}.$$

Так как $E^c \cap F^c = (E \cup F)^c$, то объединение $E \cup F$ удовлетворяет условию (1.4.1) и, следовательно, $E \cup F \in \mathcal{F}^*$.

Докажем теперь, что класс $\mathcal{F}^*$ является сигма-алгеброй. Требуется доказать, что $\cup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{F}^*$ для любых $E_n \in \mathcal{F}^*, n \in \mathbb{N}$. Обозначим $F_1 = E_1, F_n = E_n \setminus \cup_{k=1}^{n-1} E_k$, для $n \geq 2$. Заметим, что $\cup_{n=1}^{\infty} E_n = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$. Так как $\cup_{k=1}^{n+1} F_k \in \mathcal{F}^*$, то

$$\mu^*\{A\} = \mu^*\{A \cap (\cup_{k=1}^{n+1} F_k)\} + \mu^*\{A \cap (\cup_{k=1}^{n+1} F_k)^c\} \tag{1.4.3}$$

для любого $A \subseteq \Omega$. Заменим в равенстве (1.4.2) E на $\cup_{k=1}^{n} F_k$ и F на F_{n+1} и примем во внимание, что множества $\cup_{k=1}^{n} F_k$ и F_{n+1} не пересекаются. В результате получится следующее равенство

$$\mu^*\{A \cap (\cup_{k=1}^{n+1} F_k)\} = \mu^*\{A \cap (\cup_{k=1}^{n} F_k)\} + \mu^*\{A \cap F_{n+1}\}.$$

Отсюда, в свою очередь, вытекает равенство

$$\mu^*\{A \cap (\cup_{k=1}^{n+1} F_k)\} = \sum_{k=1}^{n+1} \mu^*\{A \cap F_k\}.$$

Отсюда и из (1.4.3) следует, что

$$\mu^*\{A\} = \sum_{k=1}^{n+1} \mu^*\{A \cap F_k\} + \mu^*\{A \cap (\cup_{k=1}^{n+1} F_k)^c\}.$$

Так как $(\cup_{n=1}^{\infty} E_n)^c \subseteq (\cup_{k=1}^{n+1} F_k)^c$, то

$$\mu^*\{A \cap (\cup_{k=1}^{n+1} F_k)^c\} \geq \mu^*\{A \cap (\cup_{n=1}^{\infty} E_n)^c\}.$$

Отсюда и из предыдущего равенства следует, что

$$\mu^*\{A\} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*\{A \cap F_k\} + \mu^*\{A \cap (\cup_{n=1}^{\infty} E_n)^c\}. \tag{1.4.4}$$

В силу счетной полуаддитивности внешней меры выполняется неравенство $\sum_{k=1}^{\infty} \mu^*\{A \cap F_k\} \geq \mu^*\{A \cap (\cup_{n=1}^{\infty} F_n)\}$. Из очевидного равенства $\cup_{n=1}^{\infty} F_n = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ и (1.4.4) следует, что

$$\mu^*\{A\} \geq \mu^*\{A \cap (\cup_{n=1}^{\infty} E_n)\} + \mu^*\{A \cap (\cup_{n=1}^{\infty} E_n)^c\}.$$

Это неравенство, на самом деле, является равенством, так как внешняя мера конечно полуаддитивна. Множество $\cup_{n=1}^{\infty} E_n$ удовлетворяет условию (1.4.1) и, следовательно, принадлежит $\mathcal{F}^*$.

Докажем, что функция $\mu^*\colon \mathcal{F}^* \to \overline{\mathbb{R}}_+$ счетно аддитивна. Пусть $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ является объединением счетного числа попарно непересекающихся множеств из $\mathcal{F}^*$. Неравенство (1.4.4) при $A = E$ приводит к неравенству $\mu^*\{E\} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*\{E \cap F_k\}$. Напомним, что $F_1 = E_1$ и $F_k = E_k \backslash \cup_{i=1}^{k-1} E_i$ для $k \geq 2$. В данном случае $F_k = E_k$ и $E \cap F_k = E_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$, так как множества E_k, $k \in \mathbb{N}$, попарно не пересекаются. Поэтому $\mu^*\{E\} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*\{E_k\}$. Это неравенство является равенством, так как $\mu^*\{E\} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*\{E_k\}$.

Докажем, что пространство с мерой $(\Omega, \mathcal{F}^*, \mu^*)$ является полным. Пусть $E \subset F \in \mathcal{F}^*$, $\mu^*\{F\} = 0$. Требуется доказать, что $E \in \mathcal{F}^*$. Так как $\mu^*\{E\} \leq \mu^*\{F\} = 0$, то справедливо неравенство $\mu^*\{A\} \geq \mu^*\{A \cap E^c\} = \mu^*\{A \cap E\} + \mu^*\{A \cap E^c\}$ для любого $A \in 2^{\Omega}$. На самом деле выполняется равенство $\mu^*\{A\} = \mu^*\{A \cap E\} + \mu^*\{A \cap E^c\}$ в силу полуаддитивности внешней меры. Поэтому $E \in \mathcal{F}^*$. ◀

1.4.16. Теорема. *Пусть мера* $\mu\colon \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *определена на некоторой алгебре* $\mathcal{A} \subseteq 2^{\Omega}$. *Тогда функция*

$$\mu^*\{A\} = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu\{A_n\}\colon A \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} A_n, A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N} \right\}, A \in 2^{\Omega},$$

является внешней мерой, и $\mu^*\{A\} = \mu\{A\}$ *для любого* $A \in \mathcal{A}$.

▶ Равенство $\mu^*\{A\} = \mu\{A\}$ для любого $A \in \mathcal{A}$ следует из того, что $\mu\{A\} = \sum_{k=1}^{\infty} \mu\{A_n\}$ с $A_1 = A$ и $A_n = \varnothing$ для всех $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Если $A, B \in 2^{\Omega}$ и $A \subset B$, то $\mu^*\{A\} \leq \mu^*\{B\}$, так как любая последовательность множеств из $\mathcal{A}$, которая покрывает B, покрывает также A. Докажем неравенство $\mu^*\{\cup_{n=1}^{\infty} E_n\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*\{E_n\}$ для любых $E_n \in 2^{\Omega}$, $n \in \mathbb{N}$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся множества $A_{n,k} \in \mathcal{A}$, $k \in \mathbb{N}$, такие, что $E_n \subseteq \cup_{k=1}^{\infty} A_{n,k}$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \mu\{A_{n,k}\} \leq \mu^*\{E_n\} + \varepsilon 2^{-n}$. Так как $\cup_{n=1}^{\infty} E_n \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} \cup_{k=1}^{\infty} A_{n,k}$, то

$$\mu^*\{\cup_{n=1}^{\infty} E_n\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu\{A_{n,k}\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*\{E_n\} + \varepsilon.$$

Отсюда следует требуемое неравенство $\mu^*\{\cup_{n=1}^{\infty} E_n\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*\{E_n\}$, так как число $\varepsilon > 0$ можно взять произвольно малым. ◀

1.4.17. Теорема. *Пусть счетно-конечная мера* $\mu\colon \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *определена на некоторой алгебре* $\mathcal{A} \subseteq 2^{\Omega}$. *Тогда существует единственная мера* $\overline{\mu} : \sigma(\mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$, *совпадающая с* μ *на* $\mathcal{A}$.

▶ Построим внешнюю меру μ^* по мере μ, как указано в теореме 1.4.16. Там доказано равенство $\mu^*\{A\} = \mu\{A\}$ для $A \in \mathcal{A}$. В теореме 1.4.15 доказано, что функция $\mu^*\colon \mathcal{F}^* \to \overline{\mathbb{R}}_+$ счетно аддитивна.

Докажем, что $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}^*$. Пусть $E \in \mathcal{A}$. Для любых $A \in 2^\Omega$ и $\varepsilon > 0$ найдутся множества $E_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, такие, что $A \subseteq \cup_{n=1}^\infty E_n$ и $\mu^*\{A\} + \varepsilon \geq \sum_{n=1}^\infty \mu\{E_n\}$. Так как $E_n = (E_n \cap E) \cup (E_n \cap E^c)$, то

$$\mu^*\{A\} + \varepsilon \geq \sum_{n=1}^\infty (\mu\{E_n \cap E\} + \mu\{E_n \cap E^c\}) \geq \mu^*\{A \cap E\} + \mu^*\{A \cap E^c\}.$$

Отсюда следует, что $\mu^*\{A \cap E\} + \mu^*\{A \cap E^c\} \leq \mu^*\{A\}$, так как число $\varepsilon > 0$ можно взять произвольно малым. Последнее неравенство является равенством, так как $\mu^*\{A\} \leq \mu^*\{A \cap E\} + \mu^*\{A \cap E^c\}$. Поэтому $E \in \mathcal{F}^*$, и, следовательно, $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{F}^*$. В качестве меры $\overline{\mu}$ можно взять сужение меры $\mu^*\colon \mathcal{F}^* \to \overline{\mathbb{R}}_+$ на сигма-алгебру $\sigma(\mathcal{A})$.

Докажем единственность меры $\overline{\mu}\colon \sigma(\mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$. По условию существуют множества $E_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}$, такие, что $\Omega = \cup_{n=1}^\infty E_n$ и $\mu\{E_n\} < \infty$. Можно считать, что множества $E_n, n \in \mathbb{N}$, попарно не пересекаются. Иначе вместо $E_n, n \in \mathbb{N}$, можно взять попарно непересекающиеся множества $F_1 = E_1, F_n = E_n \setminus \cup_{k=1}^{n-1} E_k, n \geq 2$. Единственность меры $\overline{\mu}$ гарантируется теоремой 1.4.6. ◀

В качестве примера применения теоремы 1.4.17 мы докажем, что внешняя мера обладает свойством непрерывности снизу.

1.4.18. Теорема. *Пусть счетно-конечная мера* μ *определена на некоторой алгебре* $\mathcal{A} \subseteq 2^\Omega$. *Тогда внешняя мера* μ^*, *построенная в теореме* 1.4.16, *обладает свойством непрерывности снизу: если* $E_n \in 2^\Omega, n \in \mathbb{N}, E_n \uparrow$, *то* $\lim_{n\to\infty} \mu^*\{E_n\} = \mu^*\{\cup_{n=1}^\infty E_n\}$.

▶ Обозначим $E = \cup_{n=1}^\infty E_n$. В силу монотонности внешней меры выполняется неравенство $\lim_{n\to\infty} \mu^*\{E_n\} \leq \mu^*\{E\}$. Это неравенство обращается в равенство, если $\lim_{n\to\infty} \mu^*\{E_n\} = \infty$.

Предположим, что $\lim_{n\to\infty} \mu^*\{E_n\} = c < \infty$. Обозначим $\overline{\mu}$ продолжение меры μ на σ-алгебру $\sigma(\mathcal{A})$. По теореме 1.4.17 класс $\mathcal{F}^*$ всех μ^*-измеримых множеств содержит σ-алгебру $\sigma(\mathcal{A})$, и выполняются равенства $\overline{\mu}\{A\} = \mu^*\{A\}$ для $A \in \sigma(\mathcal{A})$ и $\overline{\mu}\{A\} = \mu\{A\}$ для $A \in \mathcal{A}$. Для любых $n \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ найдутся множества $A_{n,k} \in \mathcal{A}$, $k \in \mathbb{N}$, такие, что $E_n \subseteq \cup_{k=1}^\infty A_{n,k}$ и $\sum_{k=1}^\infty \mu\{A_{n,k}\} < \mu^*\{E_n\} + \varepsilon$. Обозначим $B_n = \cup_{k=1}^\infty A_{n,k}, C_n = \cap_{k=n}^\infty B_k, C = \cup_{n=1}^\infty C_n$. Заметим, что $B_n, C_n, C \in \sigma(\mathcal{A})$. Так как $E_n \subseteq E_{n+m} \subseteq B_{n+m}$ для любого целого числа $m \geq 0$, то $E_n \subseteq C_n$ и $E = \cup_{n=1}^\infty E_n \subseteq \cup_{n=1}^\infty C_n = C$. Отсюда следует, что

$$\overline{\mu}\{C_n\} \le \overline{\mu}\{B_n\} \le \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\mu}\{A_{n,k}\} < \mu^*\{E_n\} + \varepsilon,$$
$$\mu^*\{E\} \le \mu^*\{C\} = \overline{\mu}\{C\} = \lim_{n\to\infty} \overline{\mu}\{C_n\} \le \lim_{n\to\infty} \mu^*\{E_n\} + \varepsilon = c + \varepsilon.$$

Число $\varepsilon > 0$ можно взять произвольно малым. Поэтому $\mu^*\{E\} \le c$, и, следовательно, $c = \lim_{n\to\infty} \mu^*\{E_n\} \le \mu^*\{E\} \le c$. ◄

1.4.19. Теорема. *Пусть мера* $\mu\colon \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *определена на некоторой* σ*-алгебре* $\mathcal{F} \subseteq 2^\Omega$. *Тогда функция*

$$\mu^*\{A\} = \inf\{\mu\{B\}\colon A \subseteq B \in \mathcal{F}\}, A \in 2^\Omega, \tag{1.4.5}$$

является внешней мерой со свойствами: (i) $\mu^*\{A\} = \mu\{A\}$ *для любого* $A \in \mathcal{F}$, (ii) *для любого* $A \in 2^\Omega$ *существует* $A' \in \mathcal{F}$ *такое, что* $\mu^*\{A\} = \mu\{A'\}$. (iii) *Функция* μ^* *непрерывна снизу: если* $2^\Omega \ni A_n \uparrow$, *то* $\lim_{n\to\infty} \mu^*\{A_n\} = \mu^*\{\cup_{n=1}^\infty A_n\}$.

► (i). Докажем сначала, что функция (1.4.5) является внешней мерой. Из (1.4.5) непосредственно следует, что $\mu^*\{A\} = \mu\{A\}$ для любого $A \in \mathcal{F}$ и, в частности, $\mu^*\{\varnothing\} = 0$, а также выполняется неравенство $\mu^*\{A\} \le \mu^*\{B\}$ для любых $A, B \in 2^\Omega$ таких, что $A \subset B$. Для произвольных множеств $A_n \in 2^\Omega$, $n \in \mathbb{N}$, и для любого числа $\varepsilon > 0$ найдутся множества $B_n \in \mathcal{F}, n \in \mathbb{N}$, такие, что $A_n \subseteq B_n$ и $\mu^*\{A_n\} + \varepsilon 2^{-n} > \mu\{B_n\}$. Так как $A = \cup_{n=1}^\infty A_n \subseteq \cup_{n=1}^\infty B_n$, то

$$\mu^*\{A\} \le \mu\{\cup_{n=1}^\infty B_n\} \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu\{B_n\} \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*\{A_n\} + \varepsilon.$$

Отсюда следует неравенство $\mu^*\{A\} \le \sum_{n=1}^\infty \mu^*\{A_n\}$, так как число $\varepsilon > 0$ можно взять произвольно малым.

(ii). По определению функции μ^* для любого $A \in 2^\Omega$ существуют $B_n \in \mathcal{F}, A \subseteq B_n, n \in \mathbb{N}$, такие, что $\mu^*\{A\} = \lim_{n\to\infty} \mu\{B_n\}$. Если $\mu^*\{A\} = \infty$, то $A \subseteq A' = \cup_{n=1}^\infty B_n \in \mathcal{F}$ и $\mu^*\{A\} = \mu\{A'\}$. Если $\mu^*\{A\} < \infty$, то $\mu\{B_n\} < \infty$ для всех n больше некоторого m. Можно считать, что $\mu\{B_n\} < \infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Обозначим $E_n = \cap_{m=n}^\infty B_m$ и $A'' = \cup_{n=1}^\infty E_n$. Заметим, что $E_n \uparrow, A \subseteq A'' \in \mathcal{F}$. Требуемое равенство $\mu^*\{A\} = \mu\{A''\}$ следует из теоремы 1.4.3 и соотношений

$$\mu^*\{A\} \le \mu\{A''\} = \lim_{n\to\infty} \mu\{E_n\} \le \lim_{n\to\infty} \mu\{B_n\} = \mu^*\{A\}.$$

(iii). Утверждение доказано в теореме 1.4.18. Приведенное там доказательство можно упростить с помощью утверждения (ii). ◀

1.4.20. Определение. Пусть мера $\mu\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}_+$ определена на некоторой сигма-алгебре $\mathcal{F} \subseteq 2^\Omega$. Функция

$$\mu_*\{A\} = \sup\{\mu\{E\}\colon E \subseteq A, E \in \mathcal{F}\}, A \in 2^\Omega, \tag{1.4.6}$$

называется *внутренней мерой.*

1.4.21. Теорема. *Пусть мера* $\mu\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}_+$ *определена на некоторой сигма-алгебре* $\mathcal{F} \subseteq 2^\Omega$. *Определим внешнюю меру* μ^*, *как указано в* (1.4.5), *и внутренюю меру* μ_*, *как указано в* (1.4.6). *Тогда:* (i) *если* $A, B \in 2^\Omega$ *и* $A \subset B$, *то* $\mu_*\{A\} \le \mu_*\{B\}$; (ii) *для любого* $A \in 2^\Omega$ *существует* $A' \in \mathcal{F}$ *такое, что* $\mu_*\{A\} = \mu\{A'\}$; (iii) *если* $A \in 2^\Omega$ *и* $B \in \mathcal{F}$, *то* $\mu\{B\} = \mu_*\{A \cap B\} + \mu^*\{A^c \cap B\}$.

▶ Утверждение (i) следует из определения внутренней меры.

(ii). Для любого $A \in 2^\Omega$ найдутся $E_n \in \mathcal{F}, E_n \subseteq A, n \in \mathbb{N}$, такие, что $\mu_*\{A\} = \lim_{n\to\infty} \mu\{E_n\}$. Обозначим $A' = \cup_{n=1}^\infty E_n$. Требуемое равенство $\mu_*\{A\} = \mu\{A'\}$ следует из соотношений

$$\mu\{A'\} \le \mu_*\{A\} = \lim_{n\to\infty} \mu\{E_n\} \le \mu\{A'\}.$$

(iii). Пусть даны произвольные множества $A \in 2^\Omega$ и $B \in \mathcal{F}$. Заметим, что множества $F = A \cap B$ и $E = A^c \cap B$ не пересекаются. По доказанному выше найдется множество $F' \in \mathcal{F}$ такое, что $F' \subseteq F$ и $\mu_*\{F\} = \mu\{F'\}$. Так как $B = F \cup E$ и $E = B \setminus F \subseteq B \setminus F'$, то

$$\mu\{B\} = \mu\{F'\} + \mu\{B \setminus F'\} = \mu_*\{F\} + \mu\{B \setminus F'\} \ge \mu_*\{F\} + \mu^*\{E\}.$$

По теореме 1.4.19 существует множество $E' \in \mathcal{F}$ такое, что $E \subseteq E'$ и $\mu^*\{E\} = \mu\{E'\}$. Так как $B = F \cup E$ и $B \setminus E' \subseteq B \setminus E = F$, то

$$\mu\{B\} = \mu\{E'\} + \mu\{B \setminus E'\} = \mu^*\{E\} + \mu\{B \setminus E'\} \le \mu^*\{E\} + \mu_*\{F\}.$$

Отсюда следует требуемое равенство $\mu\{B\} = \mu_*\{F\} + \mu^*\{E\}$. ◀

Далее мы обсудим некоторые свойства мер, определенных на борелевских σ-алгебрах евклидова пространства $\mathbb{R}^d$.

1.4.22. Определение. Мера $\mu\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ называется *регулярной,* если для любого $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ выполняются равенства

$$\mu\{A\} = \inf\{\mu\{O\}\colon A \subseteq O : \mathbb{R}^d \supseteq O - \text{откр. мн-во}\}; \tag{1.4.7}$$

$$\mu\{A\} = \sup\{\mu\{F\}\colon A \supseteq F : \mathbb{R}^d \supseteq F - \text{замкн. мн-во}\}. \tag{1.4.8}$$

1.4.23. Теорема. *Любая счетно-конечная мера* $\mu\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *является регулярной.*

▶ Предположим сначала, что мера μ конечна. Напомним, что класс всех замкнутых множеств $F \subseteq \mathbb{R}^d$ порождает σ-алгебру $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ и является π-классом. Обозначим $\mathcal{L}$ класс множеств $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, для которых теорема справедлива. Ниже будет доказано, что $\mathcal{L}$ является λ-классом и содержит все замкнутые множества. По теореме 1.2.7 будет выполняться равенство $\mathcal{L} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Тем самым теорема будет доказана для конечной меры μ.

Докажем, что $\mathcal{L}$ является λ-классом. Множество A принадлежит $\mathcal{L}$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся открытое множество O и замкнутое множество F такие, что $F \subseteq A \subseteq O$, $\mu\{O \setminus A\} < \varepsilon$ и $\mu\{A \setminus F\} < \varepsilon$. Множества Ω и $\varnothing$ принадлежат $\mathcal{L}$, так как они открыты и замкнуты. Пусть $A, B \in \mathcal{L}$ и $B \subset A$. Найдутся открытые множества O и O' и замкнутые множества F и F' такие, что $F \subseteq A \subseteq O$, $F' \subseteq B \subseteq O'$ и $\mu\{O \setminus A\} < \varepsilon/2$, $\mu\{A \setminus F\} < \varepsilon/2$, $\mu\{O' \setminus B\} < \varepsilon/2$, $\mu\{B \setminus F'\} < \varepsilon/2$. Замкнутое множество $F \setminus O'$ содержится в разности $A \setminus B$, и эта разность содержится в открытом множестве $O \setminus F'$. Так как $(A \setminus B) \setminus (F \setminus O') \subseteq (A \setminus F) \cup (O' \setminus B)$ и $(O \setminus F') \setminus (A \setminus B) \subseteq (O \setminus A) \cup (B \setminus F')$, то

$$\mu\{(A \setminus B) \setminus (F \setminus O')\} \le \mu\{A \setminus F\} + \mu\{O' \setminus B\} < \varepsilon,$$
$$\mu\{(O \setminus F') \setminus (A \setminus B)\} \le \mu\{O \setminus A\} + \mu\{B \setminus F'\} < \varepsilon$$

и, следовательно, $A \setminus B \in \mathcal{L}$.

Пусть $A_n \in \mathcal{L}, n \in \mathbb{N}$, и $A_n \uparrow$. Обозначим $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Так как $\lim_{n\to\infty} \mu\{A_n\} = \mu\{A\}$, то $\mu\{A\} < \mu\{A_m\} + \varepsilon/2$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Для A_m найдется замкнутое множество такое, что $F \subseteq A_m$ и $\mu\{A_m\} < \mu\{F\} + \varepsilon/2$. Так как $A \setminus F \subseteq (A \setminus A_m) \cup (A_m \setminus F)$ и $F \subseteq A$, то $\mu\{A \setminus F\} < \varepsilon$. Для любого $A_n, n \in \mathbb{N}$, найдется открытое множество O_n такое, что $A_n \subseteq O_n$ и $\mu\{O_n \setminus A_n\} < \varepsilon 2^{-n}$. Множество A содержится в открытом множестве $O = \cup_{n=1}^{\infty} O_n$ и

$$\mu\{O \setminus A\} \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu\{O_n \setminus A_n\} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

Тем самым доказано, что $\mathcal{L}$ является λ-классом.

Любое замкнутое множество F принадлежит $\mathcal{L}$. Нетрудно проверить, что функция

$$d(x, F) = \inf\{\|x - y\|\colon y \in F\}, x \in \mathbb{R}^d, \tag{1.4.9}$$

непрерывна. Поэтому множество $O_n = \{x \in \mathbb{R}^d \colon d(x,F) < 1/n\}$ открыто. Заметим, что $O_n \downarrow$ при $n \uparrow$ и $\cap_{n=1}^{\infty} O_n = F$. Отсюда, в силу теоремы 1.4.3, следует, что $\mu\{F\} = \lim_{n\to\infty} \mu\{O_n\}$ и, следовательно, $F \in \mathcal{L}$. Тем самым теорема доказана для конечной меры μ.

Докажем теорему в общем случае. По условию имеются борелевские множества $E_n, n \in \mathbb{N}$, такие, что $\mathbb{R}^d = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ и $\mu\{E_n\} < \infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Можно считать, что эти множества попарно не пересекаются. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ можно определить конечную меру $\mu_n\{E\} = \mu\{E \cap E_n\}, E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Пусть $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. По доказанному выше для любого $\varepsilon > 0$ существуют открытое множество O_n и замкнутое множество F_n такие, что $F_n \subseteq (E \cap E_n) \subseteq O_n$ и

$$\mu\{(A \cap E_n) \setminus F_n\} < 2^{-n}\varepsilon, \mu\{O_n \setminus (A \cap E_n)\} < 2^{-n}\varepsilon.$$

Из второго неравенства следует, что

$$\mu\{A \cap E_n\} \le \mu\{O_n\} < \mu\{A \cap E_n\} + 2^{-n-2}\varepsilon.$$

Открытое множество $O = \cup_{n=1}^{\infty} O_n$ содержит $A = \cup_{n=1}^{\infty}(A \cap E_n)$ и удовлетворяет условию (1.4.7), так как

$$\mu\{A\} \le \mu\{O\} \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu\{O_n\} < \sum_{n=1}^{\infty}(\mu\{A \cap E_n\} + 2^{-n}\varepsilon) = \mu\{A\} + \varepsilon.$$

Обратимся к доказательству свойства (1.4.8). С этой целью заметим, что замкнутое множество $G_m = \cup_{n=1}^{m} F_n$ содержится в множестве $A_m = \cup_{n=1}^{m}(A \cap E_n)$ и удовлетворяет условиям

$$\mu\{G_m\} \le \mu\{A_m\} = \mu\{A_m \setminus G_m\} + \mu\{G_m\} \le$$
$$\le \sum_{n=1}^{m} \mu\{(A \cap E_n) \setminus F_n\} + \mu\{G_m\} < \sum_{n=1}^{m} 2^{-n}\varepsilon + \mu\{G_m\} < \mu\{G_m\} + \varepsilon.$$

Так как $A_m \uparrow$ и $A = \cup_{m=1}^{\infty} A_m$, то $\lim_{m\to\infty} \mu\{A_m\} = \mu\{A\}$ в силу теоремы 1.4.3. Отсюда следует свойство (1.4.8). ◄

1.4.24. Определение. Мера $\mu \colon \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ называется *плотной*, если для любого $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ выполняется равенство

$$\mu\{A\} = \sup\{\mu\{K\} \colon K \subseteq A, \mathbb{R}^d \supset K - \text{компактное множество}\}.$$

Несложно убедиться, что множество $K \subset \mathbb{R}^d$ является компактным тогда и только тогда, когда оно ограничено и замкнуто. Напомним, что множество K называется ограниченным, если

$\sup\{\|x-y\|: x,y \in K\} < \infty$. Например, для любого $n \in \mathbb{N}$ множество $K_n = [-n,n] \times \cdots \times [-n,n] \subset \mathbb{R}^d$ является компактным.

1.4.25. Теорема. *Любая конечная мера* $\mu\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}_+$ *является плотной.*

▶ Выше упоминалось, что множество K_n компактно. Так как $K_n^c \downarrow$ при $n \uparrow$ и $\cap_{n=1}^{\infty} K_n^c = \varnothing$, то $\lim_{n\to\infty} \mu\{K_n^c\} = 0$ в силу теоремы 1.4.3. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такое, что $\mu\{K_{n_0}^c\} < \varepsilon/2$. По теореме 1.4.23 существует замкнутое множество $F \subseteq A$ такое, что $\mu\{A \setminus F\} < \varepsilon/2$. Компактное множество $K_\varepsilon = F \cap K_{n_0}$ удовлетворяет условию $\mu\{A \setminus K_\varepsilon\} < \varepsilon$. Из этого неравенства при $\varepsilon = 1/m, m \in \mathbb{N}$, как нетрудно проверить, следует, что $\mu\{A\} = \lim_{m\to\infty} \mu\{K_{1/m}\}$. ◀

В следующих двух теоремах устанавливается связь между возрастающими непрерывными справа (слева) функциями вещественного переменного и счетно-конечными мерами на прямой.

1.4.26. Теорема. *Для любой возрастающей, непрерывной справа функции* $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *существует единственная счетно-конечная мера* $\mu_F\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *со свойством* $\mu_F\{(a,b]\} = F(b) - F(a)$ *для любых* $a, b \in \mathbb{R}, a < b$.

▶ Обозначим $\Delta = (a,b]$ для любых $a,b \in \mathbb{R}, a < b$. Нетрудно видеть, что класс $\mathcal{A}$ множеств, которые можно представить в виде объединения конечного числа попарно непересекающихся отрезков вида $(\alpha,\beta] \subseteq \Delta$, является алгеброй. Сигма-алгебра $\sigma(\mathcal{A})$, порожденная алгеброй $\mathcal{A}$, совпадает с σ-алгеброй $\mathcal{B}(\Delta)$ борелевских подмножеств отрезка Δ. Определим функцию $\nu\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$, положив

$$\nu\{\varnothing\} = 0, \nu\{D\} = \sum_{l=1}^{n} [F(\beta_l) - F(\alpha_l)], D = \cup_{l=1}^{n} (\alpha_l, \beta_l] \in \mathcal{A}.$$

Функция ν конечно аддитивна. Докажем, что она счетно аддитивна. Достаточно доказать равенство

$$\nu\{(\alpha,\beta]\} = \sum_{n=1}^{\infty} \nu\{(\alpha_n,\beta_n]\}, \tag{1.4.10}$$

если отрезок $(\alpha,\beta] \subseteq \Delta$ является объединением попарно непересекающихся отрезков $(\alpha_n,\beta_n]$, $n \in \mathbb{N}$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ объединение $A = \cup_{k=1}^{n} (\alpha_k, \beta_k]$ принадлежит алгебре $\mathcal{A}$. Разность $B = (\alpha,\beta] \setminus A$, будучи элементом $\mathcal{A}$, может быть записана в виде объединения

$B = \cup_{m=1}^{r}(\gamma_m, \delta_m]$ конечного числа попарно непересекающихся отрезков. Так как $(\alpha, \beta] = A \cup B = \cup_{k=1}^{n}(\alpha_k, \beta_k] \cup \cup_{m=1}^{r}(\gamma_m, \delta_m]$, то

$$\nu\{(\alpha, \beta]\} = \sum_{k=1}^{n} \nu\{(\alpha_k, \beta_k]\} + \sum_{m=1}^{r} \nu\{(\gamma_m, \delta_m]\} \geq \sum_{k=1}^{n} \nu\{(\alpha_k, \beta_k]\}.$$

Отсюда следует, что $\nu\{(\alpha, \beta]\} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \nu\{(\alpha_n, \beta_n]\}$. Чтобы выполнялось (1.4.10), требуется доказать, что $\nu\{(\alpha, \beta]\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu\{(\alpha_n, \beta_n]\}$. Для любого $\varepsilon \in (0, \beta - \alpha)$ найдутся вещественные числа $\gamma_n > \beta_n$ такие, что $F(\gamma_n) \leq F(\beta_n) + 2^{-n}\varepsilon$, $n \in \mathbb{N}$. Сегмент $[\alpha + \varepsilon, \beta]$ покрывается последовательностью интервалов (α_n, γ_n), $n \in \mathbb{N}$. По классической теореме Гейне – Бореля – Лебега найдется конечное число интервалов (α_k, γ_k), $k = 1, \ldots, r$, объединение которых покрывает сегмент $[\alpha + \varepsilon, \beta]$. Отсюда следует, что

$$F(\beta) - F(\alpha + \varepsilon) \leq \sum_{k=1}^{r} [F(\gamma_k) - F(\alpha_k)] \leq$$
$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} [F(\beta_k) - F(\alpha_k)] + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\varepsilon = \sum_{k=1}^{\infty} \nu\{(\alpha_k, \beta_k]\} + \varepsilon.$$

Отсюда следует, что $\nu\{(\alpha, \beta]\} = F(\beta) - F(\alpha) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \nu\{(\alpha_k, \beta_k]\}$.

По теореме 1.4.17 конечная мера $\nu\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$ имеет продолжение $\overline{\nu}\colon \mathcal{B}(\Delta) \to \mathbb{R}_+$. Для каждого $\Delta_n = (-n, n], n \in \mathbb{N}$, можно построить меру $\overline{\nu}_n\colon \mathcal{B}(\Delta_n) \to \mathbb{R}_+$, как указано выше. Обозначим $\mu_n\{A\} = \overline{\nu}_n\{A \cap \Delta_n\}$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Заметим, что $\mu_n\{A\} \leq \mu_{n+1}\{A\}$ для любых $n \in \mathbb{N}$ и $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ и $\mu_n\{A\} = \mu_{n+1}\{A\}$ для любого $A \in \mathcal{B}(\Delta_n)$. Поэтому для любого отрезка $(a, b] \subset \mathbb{R}$ найдется n_0 такое, что $\mu_n\{(a, b]\} = F(b) - F(a)$ для всех $n > n_0$.

Убедимся, что функция $\mu_F\{A\} = \lim_{n\to\infty} \mu_n\{A_n\}$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, является мерой со свойствами, перечисленными в формулировке теоремы. Заметим, что $\mu_F\{\varnothing\} = 0$ и $\mu_F\{(a, b]\} = F(b) - F(a)$ для любого отрезка $(a, b] \subset \mathbb{R}$. Функция μ_F принимает конечные значения на отрезках $\Delta_n = (-n, n], n \in \mathbb{N}$. Убедимся, что функция μ_F счетно аддитивна. Если $A = \cup_{m=1}^{\infty} A_m$ и множества $A_m \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), m \in \mathbb{N}$, попарно не пересекаются, то

$$\mu_F\{A\} = \lim_{n\to\infty} \mu_n\{A\} = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \mu_n\{A_m\} \le \sum_{m=1}^{\infty} \mu_F\{A_m\},$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mu_F\{A_m\} = \lim_{k\to\infty} \sum_{m=1}^{k} \mu_F\{A_m\} = \lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{k} \mu_n\{A_m\} =$$
$$= \lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} \mu_n\{\cup_{m=1}^{k} A_m\} \le \lim_{n\to\infty} \mu_n\{A\} = \mu_F\{A\}.$$

Отсюда следует требуемое равенство $\mu_F\{A\} = \sum_{m=1}^{\infty} \mu_F\{A_m\}$.

Докажем утверждение о единственности меры μ_F. Класс $\mathcal{L}$ отрезков вида $(a, b], a, b \in \mathbb{R}$, как нетрудно видеть, является π-классом. Он порождает борелевскую сигма-алгебру $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ и содержит попарно непересекающиеся отрезки $(n, n+1], n \in \mathbb{Z}$, на которых мера μ_F принимает конечные значения. По теореме 1.4.6 мера μ_F однозначно определяется своими значениями на π-классе $\mathcal{L}$. ◀

1.4.27. Теорема. *Для любой возрастающей, непрерывной слева функции* $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *существует единственная счетно-конечная мера* $\mu_F\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *со свойством* $\mu_F\{[a, b)\} = F(b) - F(a)$ *для любых* $a, b \in \mathbb{R}, a < b$.

▶ Доказательство можно осуществить по аналогии с доказательством предыдущей теоремы. ◀

Мера μ_F называется *мерой Лебега – Стилтьеса* в честь Лебега (Henri Léon Lebesgue) и Стилтьеса (Thomas Joannes Stieltjes).

1.4.28. Пример. Мера $\mu_F\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$, порождаемая функцией $F(x) = x, x \in \mathbb{R}$, называется *мерой Лебега.*

Мера Лебега обладает многими специальными свойствами. Некоторые свойства исследованы ниже.

1.4.29. Теорема. *По мере Лебега* $\mu\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ *можно построить внешнюю меру* μ^*, *как указано в* (1.4.5), *и внутреннюю меру* μ_*, *как указано в* (1.4.6). *Пусть отображение* $T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *переводит точку* $x \in \mathbb{R}$ *в точку* $T(x) = \alpha x + \beta$, *где* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \ne 0$. *Справедливы следующие утверждения:*

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \{T^{-1}(E)\colon E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}, \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \{T(E)\colon E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}; \tag{1.4.11}$$

$$\mu\{T^{-1}(E)\} = |\alpha|^{-1}\mu\{E\}, \mu\{T(E)\} = |\alpha|\mu\{E\}, E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}); \tag{1.4.12}$$

$$\mu^*\{T^{-1}(E)\} = |\alpha|^{-1}\mu^*\{E\}, \mu^*\{T(E)\} = |\alpha|\mu^*\{E\}, E \subseteq \mathbb{R}; \tag{1.4.13}$$

$$\mu_*\{T^{-1}(E)\} = |\alpha|^{-1}\mu_*\{E\}, \mu_*\{T(E)\} = |\alpha|\mu_*\{E\}, E \subseteq \mathbb{R}. \tag{1.4.14}$$

Каждое из множеств $T^{-1}(E)$ *и* $T(E)$ *являются* μ^**-измеримым, если и только если множество* $E \subseteq \mathbb{R}$ *является* μ^**-измеримым.*

▶ По теореме 1.2.10 класс $T^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) = \{T^{-1}(E)\colon E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ является σ-алгеброй. Класс $\{E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\colon T^{-1}(E) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ также является σ-алгеброй в силу теоремы 1.2.11. Каждая из этих сигма-алгебр содержит все интервалы. Класс интервалов порождает сигма-алгебру $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Отсюда следует (1.4.11).

Определим меры $\mu_1\{E\} = \mu\{T^{-1}(E)\}$ и $\mu_2\{E\} = \mu\{T(E)\}$ на σ-алгебре $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Для любого интервала $E = (a, b), a, b \in \mathbb{R}, a < b$, выполняются следующие равенства

$$\mu_1\{E\} = \frac{b-\beta}{|\alpha|} - \frac{a-\beta}{|\alpha|} = |\alpha|^{-1}\mu\{E\},$$
$$\mu_2\{E\} = |\alpha|[(b+\beta)-(a+\beta)] = |\alpha|\mu\{E\}.$$

Класс всех интервалов является π-классом и порождает борелевскую сигма-алгебру $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Меры μ, μ_1, μ_2 принимают конечные значения на всех конечных интервалах. По теореме 1.4.6 равенства (1.4.12) выполняются для всех $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Равенства (1.4.13) и (1.4.14) следуют из (1.4.12) и определений верхней и внутренней мер. ◀

1.5. Измеримые функции

В этом параграфе собраны сведения об измеримых функциях, необходимые для исследования случайных процессов.

1.5.1. Определение. Пусть даны два измеримых пространства $(\Omega, \mathcal{F})$ и $(\Omega', \mathcal{F}')$. Отображение $f\colon \Omega \to \Omega'$ называется *измеримым,* если $f^{-1}(A') \in \mathcal{F}$ для любого $A' \in \mathcal{F}'$.

Чтобы подчеркнуть связь с другой сигма-алгеброй $\mathcal{F}'$, измеримое отображение f называют $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$*-измеримым.* Измеримое отображение $f\colon \Omega \to \Omega'$ также называется *измеримой функцией.* Понятие измеримого отображения (функции) представляет собой обобщение понятия борелевской функции. Напомним, что отображение $f\colon \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}^{d'}$ называется *борелевской функцией,* если $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ для любого $A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^{d'})$. Размерности d и d' евклидовых пространств $\mathbb{R}^d$ и $\overline{\mathbb{R}}^{d'}$ могут быть любыми натуральными числами.

1.5.2. Теорема. *Пусть даны любые измеримые пространства* $(\Omega_k, \mathcal{F}_k)$, $k = 1, 2, 3$. *Если отображения* $f_1\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ *и* $f_2\colon \Omega_2 \to \Omega_3$

измеримы, то их суперпозиция $f_2 \circ f_1 \colon \Omega_1 \to \Omega_3$ является измеримым отображением.

▶ В соответствии с определением суперпозиция $f_2 \circ f_1$ переводит точку $\omega_1 \in \Omega_1$ в точку $(f_2 \circ f_1)(\omega_1) = f_2(f_1(\omega_1)) \in \Omega_3$. Если $A \in \mathcal{F}_3$, то $B = f_2^{-1}(A) \in \mathcal{F}_2$ и $(f_2 \circ f_1)^{-1}(A) = f_1^{-1}(f_2^{-1}(A)) \in \mathcal{F}_1$. ◀

Следующая теорема позволяет свести вопрос об измеримости векторных функций к соответствующему вопросу об измеримости вещественных функций.

1.5.3. Теорема. *Пусть дано измеримое пространство $(\Omega, \mathcal{F})$. Функция $f = (f_1, \dots, f_d) \colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}^d$ измерима тогда и только тогда, когда измеримы все функции $f_k \colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}, k = 1, \dots, d$.*

▶ Если функция f измерима, то $f_k^{-1}(A_k) = f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ для любого $A_k \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, где $A = \times_{j=1}^d A_j, A_j = \overline{\mathbb{R}}$ для $j \neq k$. По определению 1.5.1 функция f_k измерима.

Предположим теперь, что функции $f_k, k = 1, \dots, d$, измеримы. Обозначим $\mathcal{L}$ класс множеств $A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^d)$, для которых $\{f \in A\} \in \mathcal{F}$. По теореме 1.2.10 класс $\mathcal{L}$ является сигма-алгеброй. Класс $\mathcal{L}$ содержит любой прямоугольник $A = \times_{k=1}^d A_k$ со сторонами в $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, так как $\{f \in A\} = \cap_{k=1}^d \{f_k \in A_k\} \in \mathcal{F}$. Тем самым доказано равенство $\mathcal{L} = \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^d)$. По определению 1.5.1 функция f измерима. ◀

Напомним, что множество $S \subset \mathbb{R}^d$ называется *всюду плотным,* если $S \cap B(x, \varepsilon) = S \cap \{y \in \mathbb{R}^d \colon \|x - y\| < \varepsilon\} \neq \varnothing$ для любой точки $x \in \mathbb{R}^d$ и для любого числа $\varepsilon > 0$. Например, d-кратное произведение $\mathbb{Q} \times \dots \times \mathbb{Q}$ всех рациональных чисел $\mathbb{Q}$ всюду плотно в $\mathbb{R}^d$.

1.5.4. Теорема. *Пусть дано измеримое пространство $(\Omega, \mathcal{F})$. Функция $f \colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий $\{f < c\} = \{\omega \in \Omega \colon f(\omega) < c\} \in \mathcal{F}$ или $\{f \leq c\} = \{\omega \in \Omega \colon f(\omega) \leq c\} \in \mathcal{F}$ для любого c из некоторого счетного всюду плотного множества $S \subset \mathbb{R}$.*

▶ Требуется доказать только достаточность условий. Предположим, например, что $\{f < c\} \in \mathcal{F}$ для любого c из некоторого счетного всюду плотного множества $S \subset \mathbb{R}$. По теореме 1.2.11 класс $\mathcal{L} = \{A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \colon f^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}$ является σ-алгеброй. Так как $\{f < c\} \in \mathcal{F}$, то $[-\infty, c) \in \mathcal{L}$. Класс полупрямых $[-\infty, c), c \in S$, порождает σ-алгебру $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, и, следовательно, $\mathcal{L} = \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$. ◀

1.5.5. Теорема. *Пусть измеримые функции $f_n \colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}, n \in \mathbb{N}$, определены на любом измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$. Тогда функции $\sup_{n \geq 1} f_n$, $\inf_{n \geq 1} f_n$, $\limsup_{n \to \infty} f_n$, $\liminf_{n \to \infty} f_n$ измеримы.*

► Функция $\sup_{n\geq 1} f_n\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима по теореме 1.5.4, так как $\{\sup_{n\geq 1} f_n \leq c\} = \cap_{n=1}^{\infty}\{f_n \leq c\} \in \mathcal{F}$ для любого $c \in \mathbb{R}$. Отсюда следует измеримость остальных перечисленных функций, так как $\inf_{n\geq 1} f_n = -\sup_{n\geq 1}(-f_n)$, $\limsup_{n\to\infty} f_n = \inf_{n\geq 1}\sup_{m\geq n} f_m$, $\liminf_{n\to\infty} f_n = \sup_{n\geq 1}\inf_{m\geq n} f_m$. ◄

Из этой теоремы следует, что максимум $f \vee g = \max\{f, g\}$ и минимум $f \wedge g = \min\{f, g\}$ измеримых функций $f, g\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ суть измеримые функции. В частности, положительная часть $f^+ = f \vee 0$ и отрицательная часть $f^- = -(f \wedge 0)$ измеримой функции f являются измеримыми функциями.

1.5.6. Определение. *Последовательность* $\{f_n\}_{n\geq 1}$ *векторных функций* $f_n\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}^d$ *поточечно сходится к векторной функции* $f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}^d$, *если* $f(\omega) = \lim_{n\to\infty} f_n(\omega)$ *для каждого* $\omega \in \Omega$.

Запись $\lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = f(\omega)$ равносильна утверждению, что

$$\|f_n(\omega) - f(\omega)\|^2 = \sum_{k=1}^{d} |f_{k,n}(\omega) - f_k(\omega)|^2 \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Отсюда следует, что поточечная сходимость векторных функций $f_n = (f_{1,n}, \ldots, f_{d,n}), n \in \mathbb{N}$, к векторной функции $f = (f_1, \ldots, f_d)$ равносильна поточечной сходимости вещественных функций $f_{k,n}$, $n \in \mathbb{N}$, к вещественной функции f_k для всех $k = 1, \ldots, d$.

1.5.7. Теорема. *Пусть измеримые функции* $f_n\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}^d$, $n \in \mathbb{N}$, *определены на измеримом пространстве* $(\Omega, \mathcal{F})$. *Если последовательность* $\{f_n\}_{n\geq 1}$ *поточечно сходится к функции* $f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}^d$, *то функция* f *измерима.*

► По теореме 1.5.3 утверждение достаточно доказать для вещественных функций $f_n\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}, n \in \mathbb{N}$. Функция f измерима по теореме 1.5.5, так как $f = \limsup_{n\to\infty} f_n$. ◄

1.5.8. Определение. Измеримая функция $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, определенная на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$, называется *простой,* если она принимает конечное число значений.

Заметим, что простая функция f не может принимать бесконечные значения. Если функция $f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ принимает значения $c_1, \ldots, c_n$, то $f = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathbb{1}_{A_k}$ и множества $A_k = \{f = c_k\} \in \mathcal{F}$, $k = 1, \ldots, n$, образуют *разбиение* множества Ω. Другими словами, они попарно не пересекаются и их объединение равно Ω.

1.5.9. Теорема. *Пусть дано измеримое пространство* $(\Omega, \mathcal{F})$. *Для любой измеримой функции* $f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *существуют простые* *функции* $f_n\colon \Omega \to \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N}$, *такие, что* $f_n \uparrow f$ *при* $n \uparrow \infty$. *Если функция* f *ограничена, то* $\lim_{n\to\infty} \sup_{\omega\in\Omega} |f_n(\omega) - f(\omega)| = 0$.

► Определим функцию $\phi_n\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$, положив

$$\phi_n(\omega) = \begin{cases} \dfrac{k-1}{2^n}, & \text{если } \dfrac{k-1}{2^n} \le f(\omega) < \dfrac{k}{2^n},\ k \in \mathbb{N}, \\ \infty, & \text{если } f(\omega) = \infty. \end{cases}$$

Легко видеть, что $\phi_n \uparrow f$ при $n \uparrow \infty$. Последовательность $\{f_n\}_{n\ge1}$ простых функций $f_n = \phi_n \mathbb{1}_{\{\phi_n \le n\}} + n\mathbb{1}_{\{\phi_n=\infty\}}$ возрастает и поточечно сходится к f. Если $f \le c$ для некоторого числа $c \ge 0$, то $f_n \le c$ и $0 \le f(\omega) - f_n(\omega) \le 2^{-n}$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\omega \in \Omega$. ◄

1.5.10. Следствие. *Пусть дано любое измеримое пространство* $(\Omega, \mathcal{F})$. *Для любой измеримой функции* $f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *существует последовательность* $\{f_n\}_{n\ge1}$ *простых функций* $f_n\colon \Omega \to \mathbb{R}$, *которая поточечно сходится к* f. *Если функция* f *ограничена, то* $\{f_n(\omega)\}_{n\ge1}$ *сходится к* $f(\omega)$ *равномерно по* $\omega \in \Omega$.

► Следует записать функцию f в виде разности $f = f^+ - f^-$ ее положительной и отрицательной частей и затем применить теорему 1.5.9 к функциям f^+ и f^-. ◄

1.5.11. Теорема. *Пусть измеримые функции* $f, g\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *определены на некотором измеримом пространстве* $(\Omega, \mathcal{F})$. *Если функции* $f \pm g, fg, f/g$ *корректно определены, то они измеримы.*

► Корректность определения функций $f \pm g, fg, f/g$ означает, что не могут иметь место неопределенности вида $(\pm\infty) + (\mp\infty)$, $(\pm\infty)\times(\mp\infty), \pm\infty/0$. Если f и g – простые функции, то $f \pm g, fg, f/g$ – также простые функции. По следствию 1.5.10 существуют последовательности $\{f_n\}_{n\ge1}$ и $\{g_n\}_{n\ge1}$ простых функций $f_n, g_n\colon \Omega \to \mathbb{R}$, которые поточечно сходятся к функциям f и g. Отсюда следует, что последовательности $\{f_n \pm g_n\}_{n\ge1}$,$\{f_n g_n\}_{n\ge1}$, $\{f_n/g_n\}_{n\ge1}$ простых функций поточечно сходятся к функциям $f \pm g, fg, f/g$. Эти функции измеримы по теореме 1.5.7. Следует позаботиться, чтобы отношение f_n/g_n было корректно определено. ◄

Из теорем 1.5.3 и 1.5.11, в частности, следует, что корректно определенная линейная комбинация $af + bg, a, b \in \mathbb{R}$, измеримых функций $f = (f_1, \ldots, f_d), g = (g_1, \ldots, g_d)\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}^d$ измерима.

Далее речь пойдет об измеримых функциях, определенных на пространстве с мерой $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Некоторое утверждение или свойство, касающееся точек множества Ω, выполняется μ-*почти всюду* (п.в.), если оно выполняется для всех $\omega \in \Omega$ за исключением точек из некоторого измеримого множества нулевой μ-меры. Упоминание о мере будет опускаться, если ясно, о какой мере идет речь. Например, функции $f, g\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}^d$ *равны п.в.*, если $\{f \neq g\} \in \mathcal{F}$ и $\mu\{f \neq g\} = 0$. Функция f *конечна п.в.*, если $\{\|f\| = \infty\} \in \mathcal{F}$ и $\mu\{\|f\| = \infty\} = 0$. Последовательность $\{f_n\}_{n\geq 1}$ функций $f_n\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}^d$ *сходится п.в.* к функции $f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}^d$, если $A = \{\lim_{n\to\infty} f_n = f\} \in \mathcal{F}$ и $\mu\{A^c\} = 0$. Последовательность $\{f_n\}_{n\geq 1}$ *фундаментальна п.в.*, если $B = \{\lim_{n,m\to\infty} \|f_n - f_m\| = 0\} \in \mathcal{F}$ и $\mu\{B^c\} = 0$.

1.5.12. Теорема. *Пусть измеримые функции* $f_n\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}^d$, $n \in \mathbb{N}$, *определены на пространстве с мерой* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.
(i) *Если последовательность* $\{f_n\}_{n\geq 1}$ *сходится п.в. к некоторой функции* $f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}^d$, *то найдется измеримая функция* $g\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}^d$ *такая, что* $f = g$ *п.в.*
(ii) *Если последовательность* $\{f_n\}_{n\geq 1}$ *сходится п.в. к функциям* $f, g\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}^d$, *то* $f = g$ *п.в.*
(iii) *Последовательность* $\{f_n\}_{n\geq 1}$ *сходится п.в. к некоторой п.в. конечной функции, если и только если она фундаментальна п.в.*

► (i). По теореме 1.5.3 можно считать, что $d = 1$. По предположению множество $A = \{\lim_{n\to\infty} f_n = f\} \subseteq \Omega$ измеримо и $\mu\{A^c\} = 0$. По теореме 1.5.5 функция $g = \liminf_{n\to\infty} f_n$ измерима. Функции f и g совпадают на множестве A, и, следовательно, $f = g$ п.в.

(ii). Множество G точек $\omega \in \Omega$, для которых последовательность $\{f_n(\omega)\}_{n\geq 1}$ сходится к $f(\omega)$ и $g(\omega)$, измеримо и $\mu\{G^c\} = 0$. Для любого $\omega \in G$ справедливо равенство $f(\omega) = g(\omega)$.

(iii). Утверждение является следствием критерия Коши: последовательность $\{f_n(\omega)\}_{n\geq 1}, \omega \in \Omega$, сходится к некоторой точке из $\mathbb{R}^d$ тогда и только тогда, когда она фундаментальна. ◄

1.5.13. Определение. Пусть измеримые, конечные функции $f, f_n\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$, определены на некотором пространстве с мерой $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Последовательность $\{f_n\}_{n\geq 1}$ *сходится по мере к* f, если $\lim_{n\to\infty} \mu\{\|f_n - f\| > \varepsilon\} = 0$ для любого $\varepsilon > 0$. Последовательность $\{f_n\}_{n\geq 1}$ называется *фундаментальной по мере,* если $\lim_{n,m\to\infty} \mu\{\|f_n - f_m\| > \varepsilon\} = 0$ для любого $\varepsilon > 0$.

В силу неравенства $\|f_n - f_m\| \leq \|f_n - f\| + \|f - f_m\|$ последовательность $\{f_n\}_{n\geq 1}$ фундаментальна по мере, если она сходится по мере к f. Если $\{f_n\}_{n\geq 1}$ сходится по мере к функциям f и g, то $f = g$

п.в. Действительно, предельный переход $n \to \infty$ в неравенстве

$$\mu\{\|f - g\| > \varepsilon\} \leq \mu\{\|f - f_n\| > \varepsilon/2\} + \mu\{\|f_n - g\| > \varepsilon/2\}$$

ведет к равенству $\mu\{\|f - g\| > \varepsilon\} = 0$ для любого $\varepsilon > 0$. Отсюда следует, что $\mu\{\|f - g\| > 0\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu\{\|f - g\| > 1/n\} = 0$.

Следующая теорема Рисса (Frigyes Riesz) играет важную роль в теории интегрирования.

1.5.14. Теорема. *Пусть измеримые функции* $f_n \colon \Omega \to \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$, *определены на пространстве с мерой* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. *Если последовательность* $\{f_n\}_{n\geq 1}$ *фундаментальна по мере, то она содержит подпоследовательность* $\{f_{k_n}\}_{n\geq 1}$, *которая сходится п.в. к некоторой измеримой функции* $f \colon \Omega \to \mathbb{R}^d$.

► В силу условия $\lim_{n,m\to\infty} \mu\{\|f_n - f_m\| > \varepsilon\} = 0$ для любого $\varepsilon > 0$ найдется последовательность $\{f_{k_n}\}_{n\geq 1}$, $k_n < k_{n+1}$, такая, что $\mu\{\|f_{k_n} - f_{k_{n+1}}\| > 2^{-n}\} < 2^{-n}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Множество $D = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} \{\|f_{k_n} - f_{k_{n+1}}\| > 2^{-n}\} \in \mathcal{F}$ имеет нулевую μ-меру. Поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_{k_n} - f_{k_{n+1}}\|$ сходится на дополнении D^c множества D. Отсюда следует, что для любого $\omega \in D^c$ последовательность $\{f_{k_n}(\omega)\}_{n\geq 1}$ сходится к некоторой точке $g(\omega) \in \mathbb{R}^d$. Последовательность $\{g_{k_n}\}_{n\geq 1}$ измеримых функций $g_{k_n} = f_{k_n}\mathbb{1}_{D^c}$, поточечно сходится к функции f: $f(\omega) = g(\omega)$, если $\omega \in D^c$, и $f(\omega) = 0$, если $\omega \in D$. По теореме 1.5.7 функция f измерима. Последовательность $\{f_{k_n}\}_{n\geq 1}$ сходится п.в. к f. ◄

1.5.15. Теорема. *Пусть измеримые функции* $f_n \colon \Omega \to \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$, *определены на пространстве с мерой* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. *Последовательность* $\{f_n\}_{n\geq 1}$ *сходится по мере тогда и только тогда, когда она фундаментальна по мере.*

► Требуется только доказать, что фундаментальная по мере последовательность $\{f_n\}_{n\geq 1}$ сходится по мере к некоторой измеримой функции f. По теореме Рисса найдется подпоследовательность $\{f_{k_n}\}_{n\geq 1}$, которая сходится п.в. к некоторой измеримой функции $f \colon \Omega \to \mathbb{R}^d$. Для любого $n \in \mathbb{N}, n > k_1$, найдется k_m такое, что $k_m \leq n < k_{m+1}$. Для любого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$\mu\{\|f_n - f\| > \varepsilon\} \leq \mu\{\|f_n - f_{k_m}\| > \varepsilon/2\} + \mu\{\|f_{k_m} - f\| > \varepsilon/2\},$$

из которого следует, что $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ по мере. ◄

1.5.16. Теорема. *Пусть дано пространство с мерой* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. *Если* $A_n \in \mathcal{F}, n \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \mu\{A_n\} < \infty$, *то* $\mu\{\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n\} = 0$.

▶ Теорема содержится в теореме 1.4.13, по которой

$$\mu\{\cap_{m=1}^{\infty} \cup_{n=m}^{\infty} A_n\} = \lim_{m\to\infty} \mu\{\cup_{n=m}^{\infty} A_n\} \le \lim_{m\to\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \mu\{A_n\} = 0. \quad ◀$$

Теорема 1.5.16 называется *леммой Бореля – Кантелли* в честь Бореля (Félix Edouard Justine Émile Borel) и Кантелли (Francesco Paolo Cantelli), впервые доказавших эту теорему для меры μ, удовлетворяющей условию $\mu\{\Omega\} = 1$.

Нам понадобится знаменитая теорема Лузина (Николай Николаевич Лузин) об аппроксимации борелевских функций $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ непрерывными функциями. Напомним, что *носителем* функции f называется замыкание множества $\{f \ne 0\} = \{x \in \mathbb{R}^d\colon f(x) \ne 0\}$.

1.5.17. Теорема. *Пусть даны мера* $\mu\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}_+$, *конечная на каждом шаре* $B_r = \{x \in \mathbb{R}^d\colon \|x\| < r\}, r > 0$, *и борелевская функция* $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. *Если* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mu\{A\} < \infty$ *и* $f(x) = 0$ *для всех* $x \in A^c$, *то для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется непрерывная функция* $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *с компактным носителем такая, что*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |g(x)| \le \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |f(x)|, \mu\{f \ne g\} < \varepsilon. \tag{1.5.1}$$

▶ Теорема будет доказана в несколько этапов. (i). Теорема верна для индикаторной функции $f = \mathbb{1}_K$ любого компактного множества $K \subset \mathbb{R}^d$. Напомним, что величина $\rho(x, K) = \inf\{\|x-y\|\colon y \in K\}$ называется расстоянием между точкой $x \in \mathbb{R}^d$ и множеством K. Функция $\rho(x, K), x \in \mathbb{R}^d$, непрерывна и обращается в ноль только в точках $x \in K$. По теореме 1.4.23 для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество O такое, что $K \subseteq O$ и $\mu\{O \setminus K\} < \varepsilon$. Можно считать, что множество O ограничено. В противном случае вместо O можно взять пересечение $O \cap B_r$ с некоторым открытым шаром $B_r = \{\|x\| < r\}$, содержащим K. Такой шар существует, так как K является компактным множеством. Функция

$$g(x) = \frac{\rho(x, O^c)}{\rho(x, O^c) + \rho(x, K)}, x \in \mathbb{R}^d, \tag{1.5.2}$$

непрерывна, ограничена единицей, обращается в ноль на замкнутом множестве O^c и совпадает с функцией $f = \mathbb{1}_K$ на множестве K. Заметим, что $\mu\{f \ne g\} \le \mu\{O \setminus K\} < \varepsilon$. Носитель функции g является компактным множеством. Он лежит в замыкании $\overline{O}$ ограниченного множества O. Функция g удовлетворяет условиям (1.5.1).

(ii). Докажем теорему для индикаторной функции $f = \mathbb{1}_A$ любого множества $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ конечной меры $\mu\{A\} < \infty$. По теореме 1.4.25 для любого $\varepsilon > 0$ найдется компактное множество $K \subseteq A$ такое, что $\mu\{A \setminus K\} < \varepsilon/2$. Заметим, что $f = \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_K + \mathbb{1}_{A\setminus K}$. По доказанному в (i) для любого $\varepsilon > 0$ найдется непрерывная функция $g\colon \mathbb{R}^d \to [0,1]$ с компактным носителем такая, что $\mu\{g \neq \mathbb{1}_K\} < \varepsilon/2$. Обозначим $B = \{\mathbb{1}_K \neq g\}$. Функции f и g могут отличаться только на множества $B \cup (A \setminus K)$ и, следовательно, $\mu\{g \neq \mathbb{1}_A\} < \varepsilon$. Функция g удовлетворяет условиям (1.5.1).

(iii). Докажем теорему для любой борелевской функции $f\colon \mathbb{R}^d \to [0,1)$, которая обращается в ноль на дополнении некоторого компактного множества $K \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Заметим, что $\mu\{K\} < \infty$. По доказанному в (i) существует ограниченное открытое множество O' такое, что $K \subseteq O'$. Определим функции

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{k-1}{2^n} \mathbb{1}_{[(k-1) \le 2^n f < k]}(x), x \in \mathbb{R}^d, n \in \mathbb{N}.$$

Возрастающая последовательность $\{f_n\}_{n\ge 1}$ простых функций сходится к функции f равномерно по $x \in \mathbb{R}^d$. Отсюда следует, что $f = f_1 + \sum_{n=2}^{\infty}(f_n - f_{n-1})$, и ряд сходится равномерно на $\mathbb{R}^d$. Функции $2f_1, 2^n(f_n - f_{n-1}), n \ge 2$, являются индикаторными функциями некоторых подмножеств $A_n, n \in \mathbb{N}$, множества K; другими словами, $2f_1 = \mathbb{1}_{A_1}, 2^n(f_n - f_{n-1}) = \mathbb{1}_{A_n}$, где $A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), A_n \subseteq K$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Функция f является суммой $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\mathbb{1}_{A_n}(x), x \in \mathbb{R}^d$, равномерно сходящегося ряда. По доказанному в (ii) для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдутся компактное множество $K_n \subseteq A_n \subseteq K$ и ограниченное открытое множество O_n такие, что $\mu\{A_n \setminus K_n\} < 2^{-n-1}\varepsilon$ и $\mu\{O_n \setminus K_n\} < 2^{-n-1}\varepsilon$. Можно считать, что $O_n \subseteq O'$ для всех $n \in \mathbb{N}$. В противном случае вместо O_n можно взять $O_n \cap O'$. Напомним, что $K_n \subseteq K \subseteq O'$. Построим функцию g_n, как указано в (1.5.2) с $K = K_n$ и $O = O_n$. Носитель функции g_n является компактным подмножеством замыкания $\overline{O}_n$ множества O_n. Функции $\mathbb{1}_{A_n}$ и g_n могут отличаться только на множестве $(A_n \setminus K_n) \cup (O_n \setminus K_n)$. Функция

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n(x)}{2^n}, x \in \mathbb{R}^d,$$

будучи суммой равномерно сходящегося ряда, непрерывна. Она может отличаться от f только на множестве $\cup_{n=1}^{\infty}(A_n \setminus K_n) \cup (O_n \setminus K_n)$, и, следовательно,

$$\mu\{f \neq g\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} (\mu\{A_n \setminus K_n\} + \mu\{O_n \setminus K_n\}) < \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\varepsilon = \varepsilon.$$

Функция g обращается в ноль на множестве $\cap_{n=1}^{\infty} O_n^c$. Поэтому носитель функции g лежит в замыкании множества $\cup_{n=1}^{\infty} O_n \subseteq \overline{O'}$. Замыкание $\overline{O'}$ ограниченного открытого множества O' ограничено и, следовательно, компактно. Поэтому носитель функции g является компактным множеством. Если $\sup_{x\in\mathbb{R}^d} g(x) \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^d} f(x)$, то функция g удовлетворяет условиям (1.5.1). В противном случае можно рассуждать следующим образом.

Обозначим $c = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} f(x)$. Определим функцию $\phi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, положив $\phi(t) = t$ для $t \leq c$ и $\phi(t) = c$ для $t > c$. Функция ϕ непрерывна. Функция $\overline{g}(x) = \phi(g(x)), x \in \mathbb{R}^d$, непрерывна и удовлетворяет условию $\sup_{x\in\mathbb{R}^d} \overline{g}(x) \leq c$. Из легко проверяемого соотношения $\{f = g\} \subseteq \{f = \overline{g}\}$ следует, что $\mu\{f \neq \overline{g}\} \leq \mu\{f \neq g\} < \varepsilon$. Функция $\overline{g}$ удовлетворяет условиям (1.5.1).

(iv). Докажем теорему для произвольной борелевской функции $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, которая обращается в ноль на дополнении некоторого множества $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ конечной меры $\mu\{A\} < \infty$ и удовлетворяет условию $\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |f(x)| < c$ для некоторого $c > 0$.

Предположим, что теорема справедлива для положительной и отрицательной частей функции $c^{-1}f$. Если функции $g^{\pm}$ и $(c^{-1}f)^{\pm}$ удовлетворяют условиям (1.5.1), то функции $g = cg^+ - cg^-$ и f удовлетворяют условиям (1.5.1). Поэтому можно считать, что функция f неотрицательна, и $c = 1$. По теореме 1.4.25 для любого $\varepsilon > 0$ найдется компактное множество $K \subseteq A$ такое, что $\mu\{A \setminus K\} < \varepsilon/2$. Запишем функцию f в виде суммы $f = f\mathbb{1}_K + f\mathbb{1}_{K^c}$. Функция $\phi = f\mathbb{1}_K$ обращается в ноль на дополнении компактного множества K. По доказанному в (iii) найдется непрерывная функция $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ с компактным носителем такая, что

$$\mu\{g \neq f\mathbb{1}_K\} < \varepsilon/2, \sup_{x\in\mathbb{R}^d} g(x) \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^d} f(x)\mathbb{1}_K(x) = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} f(x).$$

Обозначим $B = \{g \neq f\mathbb{1}_K\}$. Функции f и g могут отличаться только на множестве $B \cup (A \setminus K)$, и, следовательно, $\mu\{f \neq g\} < \varepsilon$. Функция g удовлетворяет условиям (1.5.1).

(v). Докажем теорему в общем случае. По условию функция f обращается в ноль на дополнении множества $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ конечной меры $\mu\{A\} < \infty$. Поэтому для любого $n \in \mathbb{N}$ множество $A_n = \{|f| > n\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ лежит в множестве A. Заметим, что $A_n \downarrow$ при $n \to \infty$ и $\cap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$ и $\lim_{n\to\infty} \mu\{A_n\} = 0$ по теореме 1.4.3. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется $m \in \mathbb{N}$ такое, что $\mu\{A_m\} < \varepsilon/2$. Заметим, что $f = f\mathbb{1}_{A\cap A_m^c} + f\mathbb{1}_{(A\cap A_m^c)^c}$. Функция $f\mathbb{1}_{A\cap A_m^c}$ удовлетворяет условиям из (iv). Поэтому найдется непрерывная функция $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ с компактным носителем такая, что $\mu\{g \neq f\mathbb{1}_{A\cap A_m^c}\} < \varepsilon/2$ и $\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |g(x)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |f(x)\mathbb{1}_{A\cap A_m^c}(x)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |f(x)|$. Обозначим $B = \{g \neq f\mathbb{1}_{A\cap A_m^c}\}$. Функции f и g могут отличаться только на множестве $B \cup A_m$ и, следовательно, $\mu\{f \neq g\} < \varepsilon$. Функция g удовлетворяет условиям (1.5.1). ◄

1.6. Интегрирование

В этом параграфе приведены необходимые сведения об интегрировании измеримых функций по мере.

1.6.1. Определение. Пусть измеримая функция $f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ определена на пространстве с мерой $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Если $f \geq 0$, то *интегралом* функции f называется величина

$$\int_\Omega f\,d\mu = \sup\{a_1\mu\{A_1\} + \cdots + a_n\mu\{A_n\}\},$$

где точная верхняя грань вычисляется по всем простым функциям $h = a_1\mathbb{1}_{A_1} + \cdots + a_n\mathbb{1}_{A_n}, A_k = \{h = a_k\}$, которые удовлетворяют неравенствам $0 \leq h \leq f$. Может случиться, что $a_k = 0$ и $\mu\{A_k\} = \infty$ для некоторого $k = 1, \ldots, n$. В этом случае полагают $a_k\mu\{A_k\} = 0$.

Величина $\int_\Omega f\,d\mu = \int_\Omega f^+\,d\mu - \int_\Omega f^-\,d\mu$, если она корректно определена, называется *интегралом* функции f. Функция f называется *интегрируемой,* если $\int_\Omega f^+\,d\mu + \int_\Omega f^-\,d\mu < \infty$.

Наряду с обозначением $\int_\Omega f\,d\mu$ будет использоваться обозначение $\int_\Omega f(\omega)\,\mu\{d\omega\}$.

Пусть даны измеримые функции $f, g\colon \Omega \to \mathbb{R}_+$ такие, что $f \leq g$. Если простая функция h удовлетворяет неравенствам $0 \leq h \leq f$, то $0 \leq h \leq g$ и, следовательно,

$$0 \leq \int_\Omega f d\mu \leq \int_\Omega g d\mu. \tag{1.6.1}$$

Пусть дана любая простая функция $f = a_1\mathbb{1}_{A_1} + \cdots + a_n\mathbb{1}_{A_n}$, где $A_k = \{f = a_k\}$. Интеграл функции f, если он существует, вычисляется по формуле

$$\int_\Omega f d\mu = a_1\mu\{A_1\} + \cdots + a_n\mu\{A_n\}. \tag{1.6.2}$$

Важно, что значение интеграла не зависит от записи простой функции в виде линейной комбинации индикаторных функций.

1.6.2. Теорема. *Интеграл простой функции, если он существует, определяется однозначно.*

► Пусть простая функция $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ определена на пространстве с мерой $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Предположим, что она допускает две записи $f = a_1\mathbb{1}_{A_1} + \cdots + a_n\mathbb{1}_{A_n}$ и $f = b_1\mathbb{1}_{B_1} + \cdots + b_m\mathbb{1}_{B_m}$. Множества $A_r = \{f = a_k\} \in \mathcal{F}, k = 1, \ldots, n$, а также множества $B_k = \{f = b_k\} \in \mathcal{F}, k = 1, \ldots, m$, образуют разбиения множества Ω. Если $\omega \in A_k \cap B_r$, то $a_k = f(\omega) = b_r$ и

$$\sum_{k=1}^n a_k\mu\{A_k\} = \sum_{k=1}^n\sum_{r=1}^m a_k\mu\{A_k \cap B_r\} = \\ = \sum_{r=1}^m\sum_{k=1}^n b_r\mu\{A_k \cap B_r\} = \sum_{r=1}^m b_r\mu\{B_r\}. \quad ◄$$

Следующая теорема, принадлежащая Леви (Beppo Levi), называется *теоремой о монотонной сходимости.*

1.6.3. Теорема. *Пусть измеримые функции* $f, f_n\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$, $n \in \mathbb{N}$, *определены на пространстве с мерой* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. *Если* $f_n \uparrow f$ *при* $n \to \infty$, *то*

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n\, d\mu = \int_\Omega f\, d\mu.$$

► Так как $\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n\, d\mu \le \int_\Omega f\, d\mu$ в силу (1.6.1), то достаточно доказать, что $\int_\Omega f\, d\mu \le \lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n\, d\mu$. Это неравенство обращается в равенство, если $\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n\, d\mu = \infty$. Предположим, что $\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f\, d\mu < \infty$. Достаточно доказать неравенство $\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n\, d\mu \ge \int_\Omega h\, d\mu$ для любой простой функции h, $0 \le h \le f$. Запишем h в виде линейной комбинации $h = b_1\mathbb{1}_{B_1} + \cdots + b_m\mathbb{1}_{B_m}$ индикаторных функций измеримых множеств с неотрицательными коэффициентами. Обозначим $A_n = \{ch \le f_n\}$ для любого $0 < c < 1$.

Заметим, что $A_n \subset A_{n+1}, \Omega = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, $B_k = \cup_{n=1}^{\infty} B_k \cap A_n$. В силу теоремы 1.4.3 для каждого $k = 1, \ldots, m$ справедливо равенство $\mu\{B_k\} = \lim_{n\to\infty} \mu\{B_k \cap A_n\}$. С учетом неравенства $ch\mathbb{1}_{A_n} \leq f_n$ можно убедиться, что $\int_\Omega ch\mathbb{1}_{A_n}\, d\mu \leq \int_\Omega f_n\, d\mu$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\, d\mu \geq \lim_{n\to\infty} \int_\Omega ch\mathbb{1}_{A_n}\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m} cb_k \mu\{B_k \cap A_n\} =$$
$$= \sum_{k=1}^{m} cb_k \mu\{B_k\} = c\int_\Omega h\, d\mu.$$

Отсюда следует, что $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\, d\mu \geq \int_\Omega h\, d\mu$ при $c \uparrow 1$. ◀

Следующая теорема, принадлежащая Фату (Pierre Joseph Louis Fatou), известна под названием *леммы Фату.*

1.6.4. Теорема. *Для любых измеримых функций* $f_n \colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$, $n \in \mathbb{N}$, *справедливо неравенство*

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n\, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\, d\mu.$$

▶ По теореме 1.5.5 функции $f = \liminf_{n\to\infty} f_n$ и $g_n = \inf_{k\geq n} f_k$, $n \in \mathbb{N}$, измеримы. Так как $g_n \uparrow f$, $g_n \leq f_n$, то, по теореме 1.6.3,

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega g_n\, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\, d\mu. \quad ◀$$

1.6.5. Теорема. *Пусть измеримые функции* $f, g \colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *определены на пространстве с мерой* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.

(i) *Если интеграл* $\int_\Omega f\, d\mu$ *существует, то для любого* $c \in \mathbb{R}$ *интеграл* $\int_\Omega (cf)\, d\mu$ *существует и выполняется равенство*

$$\int_\Omega (cf)\, d\mu = c\int_\Omega f\, d\mu. \tag{1.6.3}$$

(ii) *Если интегралы* $\int_\Omega f\, d\mu$ *и* $\int_\Omega g\, d\mu$ *существуют, сумма интегралов* $\int_\Omega f\, d\mu + \int_\Omega g\, d\mu$ *и функция* $f + g$ *корректно определены, то интеграл* $\int_\Omega (f+g)\, d\mu$ *существует и выполняется равенство*

$$\int_\Omega (f+g)\, d\mu = \int_\Omega f\, d\mu + \int_\Omega g\, d\mu. \tag{1.6.4}$$

▶ Теорему нетрудно доказать для простых функций с помощью формулы (1.6.2). Докажем теорему в общем случае.

(i). Предположим, что $c \geq 0$ и $f \geq 0$. По теореме 1.5.9 существует неубывающая последовательность $\{f_n\}_{\geq 1}$ неотрицательных простых функций, сходящаяся к функции f. Равенство (1.6.3) справедливо для f_n. Отсюда, в силу теоремы 1.6.3, следует, что

$$\int_\Omega cf\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega cf_n\,d\mu = c\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n\,d\mu = c\int_\Omega f\,d\mu.$$

Предположим теперь, что интеграл $\int_\Omega f\,d\mu$ функции $f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ существует. Если, например, $c < 0$, то $(cf)^+ = |c|f^-, (cf)^- = |c|f^+$,

$$\int_\Omega cf\,d\mu = |c|\int_\Omega f^-\,d\mu - |c|\int_\Omega cf^+\,d\mu = c\int_\Omega f\,d\mu.$$

(ii). Предположим, что $f \geq 0$ и $g \geq 0$. По теореме 1.5.9 существуют неубывающие последовательности $\{f_n\}_{n\geq 1}$ и $\{g_n\}_{n\geq 1}$ неотрицательных простых функций, которые сходятся поточечно к f и g. Равенство (1.6.4) выполняется для простых функций. Отсюда, в силу теоремы 1.6.3, следует, что

$$\int_\Omega (f+g)d\mu \leftarrow \int_\Omega (f_n+g_n)d\mu = \int_\Omega f_n d\mu + \int_\Omega g_n d\mu \to \int_\Omega f d\mu + \int_\Omega g d\mu$$

при $n \to \infty$. Предположим теперь, что функции f и g могут принимать любые значения и величина $\int_\Omega f d\mu + \int_\Omega g d\mu$ конечна. Тогда функции f и g интегрируемы. Так как равенство (1.6.4) для положительных функций справедливо, то

$$\int_\Omega f\,d\mu + \int_\Omega g\,d\mu = \int_\Omega f^+\,d\mu - \int_\Omega f^-\,d\mu + \int_\Omega g^+\,d\mu - \int_\Omega g^-\,d\mu =$$
$$= \int_\Omega (f^+ + g^+)\,d\mu - \int_\Omega (f^- + g^-)\,d\mu.$$

Заметим, что $f^+ + g^+$ и $f^- + g^-$ являются положительной и отрицательной частями функции $(f^+ + g^+) - (f^- + g^-)$. С другой стороны, эта функция совпадает с функцией $f+g$. По определению интеграла должны выполняться равенства

$$\int_\Omega f\,d\mu + \int_\Omega g\,d\mu = \int_\Omega (f^+ + g^+)\,d\mu - \int_\Omega (f^- + g^-)\,d\mu =$$
$$= \int_\Omega ((f^+ + g^+) - (f^- + g^-))\,d\mu = \int_\Omega (f+g)\,d\mu.$$

Нам осталось исследовать случай, когда величина $\int_\Omega f\,d\mu + \int_\Omega g\,d\mu$ бесконечна. Предположим, например, что она равна ∞. В этом случае одно из слагаемых равно ∞, а другое слагаемое равно ∞ или конечно. Предположим, например, что $\int_\Omega f\,d\mu = \infty$ и $|\int_\Omega g\,d\mu| < \infty$. В этом случае все интегралы $\int_\Omega f^-\,d\mu$ и $\int_\Omega g^\pm\,d\mu$ конечны, а интеграл $\int_\Omega f^+\,d\mu$ равен бесконечности. Функция $(f+g)^-$ интегрируема в силу неравенств $(f+g)^- \le f^- + g^-$ и (1.6.1). Из неравенства $f^+ = f + g + f^- - g \le (f+g)^+ + f^- + g^-$ и соотношений

$$\int_\Omega f^+\,d\mu \le \int_\Omega ((f+g)^+ + f^- + g^-)\,d\mu = \int_\Omega (f+g)^+\,d\mu + \int_\Omega (f^- + g^-)\,d\mu$$

следует, что $\int_\Omega (f+g)^+\,d\mu = \infty$ и, следовательно,

$$\int_\Omega f\,d\mu + \int_\Omega g\,d\mu = \infty = \int_\Omega (f+g)\,d\mu.$$

Эти рассуждения с очевидными изменениями применимы для доказательства остальных утверждений. ◄

Обозначим $\mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{F}, \mu), p > 0$, множество измеримых функций $f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ со свойством $\|f\|_p = (\int_\Omega |f|^p\,d\mu)^{1/p} < \infty$. Величина $\|f\|_p$ называется *нормой* функции f. Множество $\mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ является вещественным линейным пространством.

1.6.6. Следствие. *Пусть даны функции $f, g \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ и любые числа $a, b \in \mathbb{R}$. Тогда функция $af + bg$ принадлежит $\mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ и выполняется равенство*

$$\int_\Omega (af + bg)\,d\mu = a\int_\Omega f\,d\mu + b\int_\Omega g\,d\mu.$$

1.6.7. Теорема. *Пусть измеримая функция $f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ определена на пространстве с мерой $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.* (i) *Если одна из функций f и $|f|$ интегрируема, то другая функция интегрируема и выполняется неравенство $|\int_\Omega f d\mu| \le \int_\Omega |f| d\mu$.*
(ii) *Если $f = 0$ п.в., то f – интегрируемая функция и $\int_\Omega f\,d\mu = 0$.*
(iii) *Если f – интегрируемая функция, то $\mu\{|f| = \infty\} = 0$.*
(iv) *Если $f \ge 0$, то $\varepsilon\mu\{f \ge \varepsilon\} \le \int_\Omega f\,d\mu$ для любого $\varepsilon > 0$.*
(v) *Если $f \ge 0$ п.в. и $\int_\Omega f\,d\mu = 0$, то $f = 0$ п.в.*

► Утверждения (i) – (ii), как легко видеть, непосредственно следуют из определения понятия интеграла.

(iii). Если $\mu\{|f| = \infty\} > 0$, то получается противоречие

$$\infty = \infty \cdot \mu\{|f| \geq \varepsilon\} = \int_\Omega |f| \mathbb{1}_{\{|f|=\infty\}} \, d\mu \leq \int_\Omega |f| \, d\mu < \infty.$$

(iv). Следует применить неравенство (1.6.1) к $\varepsilon \mathbb{1}_{\{f \geq \varepsilon\}}$ и f:

$$\varepsilon \mu\{f \geq \varepsilon\} = \int_\Omega \varepsilon \mathbb{1}_{\{f \geq \varepsilon\}} \, d\mu \leq \int_\Omega f \, d\mu.$$

Это неравенство называется *неравенством Маркова – Чебышева* (Андрей Андреевич Марков и Пафнутий Львович Чебышев).

(v). По неравенству Маркова – Чебышева для любого $\varepsilon > 0$ выполняется равенство $\varepsilon\mu\{f \geq \varepsilon\} = 0$. Отсюда, в свою очередь, следует, что $\mu\{f > 0\} \leq \sum_{n=1}^\infty \mu\{f > 1/n\} = 0$. ◀

1.6.8. Теорема. *Пусть даны измеримые функции $f, g\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, интегралы которых существуют.*
(i) *Если $g \leq f$ п.в., то $\int_\Omega g \, d\mu \leq \int_\Omega f \, d\mu$.*
(ii) *Если $f = g$ п.в., то $\int_\Omega g \, d\mu = \int_\Omega f \, d\mu$.*

▶ (i). Требуемое неравенство выполняется, если $\int_\Omega g \, d\mu = -\infty$ или $\int_\Omega f \, d\mu = \infty$. Поэтому можно считать, что $\int_\Omega g \, d\mu > -\infty$ и $\int_\Omega f \, d\mu < \infty$. Это означает, что функции f и g интегрируемы и, следовательно, $0 \leq \int_\Omega (f-g) \, d\mu = \int_\Omega f \, d\mu - \int_\Omega g \, d\mu$ по теореме 1.6.5.

(ii). Утверждение следует из (i). ◀

1.6.9. Теорема. *Пусть измеримые функции $f, f_n\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, определены на пространстве с мерой $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Если $f_n \uparrow f$ и $\int_\Omega (\inf_{n\geq 1} f_n) \, d\mu > -\infty$ или если $f_n \downarrow f$ и $\int_\Omega (\sup_{n \geq 1} f_n) \, d\mu < \infty$, то*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu = \int_\Omega f \, d\mu. \tag{1.6.5}$$

▶ Обозначим $\phi = \inf_{n \geq 1} f_n$. Если $f_n \uparrow f$, то имеет место сходимость $0 \leq (f_n - \phi) \uparrow (f - \phi)$ при $n \to \infty$. Заметим, что суммы $\int_\Omega \phi \, d\mu + \int_\Omega (f_n - \phi) \, d\mu$ и $\int_\Omega \phi \, d\mu + \int_\Omega (f-\phi) \, d\mu$ корректно определены. Утверждение (1.6.5) следует из теорем 1.6.3 и 1.6.5 и следующих соотношений

$$\int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega \phi \, d\mu + \int_\Omega (f - \phi) \, d\mu = \int_\Omega \phi \, d\mu + \lim_{n\to\infty} \int_\Omega (f_n - \phi) \, d\mu =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \Big(\int_\Omega \phi \, d\mu + \int_\Omega (f_n - \phi) \, d\mu \Big) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu.$$

Аналогично можно доказать другое утверждение. Обозначим $\psi = \sup_{n\geq 1} f_n$. Если $f_n \downarrow f$, то $0 \leq (\psi - f_n) \uparrow (\psi - f)$ при $n \to \infty$. Далее можно воспользоваться знакомыми рассуждениями. ◀

1.6.10. Теорема. *Если* $p \in (1,\infty), q = p/(p-1), f \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, $g \in \mathcal{L}_q(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, *то* $fg \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *и выполняется неравенство Гельдера* (*Ludwig Otto Hölder*)

$$\int_\Omega |fg|\, d\mu \leq \Big(\int_\Omega |f|^p\, d\mu\Big)^{1/p}\Big(\int_\Omega |g|^q\, d\mu\Big)^{1/q}. \qquad (1.6.6)$$

▶ Обозначим $a^p = \int_\Omega |f|^p\, d\mu$ и $b^q = \int_\Omega |g|^q\, d\mu$. Если $ab = 0$, то $fg = 0$ п.в. и, следовательно, неравенство (1.6.6) выполняется. Далее предполагается, что $0 < ab < \infty$. Отсюда, в силу теоремы 1.6.7, следует, что $|f(\omega)| < \infty$ и $|g(\omega)| < \infty$ для почти всех $\omega \in \Omega$. Обозначим $\Omega' = \{\omega \in \Omega : 0 < |f(\omega)g(\omega)| < \infty\}$. Для любого $\omega \in \Omega'$ найдутся $t, t' \in \mathbb{R}$ такие, что $|f(\omega)|/a = e^{t/p}$ и $|g(\omega)|/b = e^{t'/q}$. Функция $e^x, x \in \mathbb{R}$, является выпуклой. Так как $1/p + 1/q = 1$, то

$$\frac{|f(\omega)|}{a}\frac{|g(\omega)|}{b} = e^{t/p+t'/q} \leq \frac{1}{p}e^t + \frac{1}{q}e^{t'} = \frac{1}{p}\frac{|f(\omega)|^p}{a^p} + \frac{1}{q}\frac{|g(\omega)|^q}{b^q}.$$

Отсюда, после интегрирования, следует, что

$$\int_\Omega \frac{|f|}{a}\frac{|g|}{b}\, d\mu = \int_{\Omega'} \frac{|f|}{a}\frac{|g|}{b}\, d\mu \leq \int_\Omega \frac{|f|^p}{a^p}\, d\mu + \int_\Omega \frac{|g|^q}{b^q}\, d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Неравенство (1.6.6) получается после умножения на ab. ◀

При $p = q = 2$ неравенство (1.6.6) известно под названием неравенства Коши – Буняковского (Augustin Louis Cauchy, Виктор Яковлевич Буняковский).

1.6.11. Теорема. *Если* $p \in [1,\infty), f, g \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, *то функция* $f + g$ *принадлежит* $\mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *и выполняется неравенство Минковского* (*Hermann Minkowski*)

$$\Big(\int_\Omega |f+g|^p\, d\mu\Big)^{1/p} \leq \Big(\int_\Omega |f|^p\, d\mu\Big)^{1/p} + \Big(\int_\Omega |g|^p\, d\mu\Big)^{1/p}. \qquad (1.6.7)$$

▶ Из неравенства $|f + g|^p \leq 2^p(|f|^p + |g|^p)$, теоремы 1.6.8 и линейного свойства интеграла следует, что функция $(|f| + |g|)^p$ интегрируема. Попутно также доказано неравенство (1.6.7) для $p = 1$. Предположим, что $1 < p < \infty$. Обозначим $q = p/(p-1)$ и заметим, что $(p-1)q = p$. Воспользуемся соотношениями

$$|f+g|^p \leq (|f| + |g|)^p = |f|(|f| + |g|)^{p-1} + |g|(|f| + |g|)^{p-1}$$

и неравенством Гельдера

$$\int_\Omega |f|(|f|+|g|)^{p-1}\,d\mu \le (\int_\Omega |f|^p\,d\mu)^{1/p}(\int_\Omega (|f|+|g|)^{(p-1)q}\,d\mu)^{1/q}.$$

В этом неравенстве функции f и g можно поменять ролями. Из этих неравенств следует, что

$$\int_\Omega |f+g|^p\,d\mu \le \Big(\int_\Omega (|f|+|g|)^p\,d\mu\Big)^{1/q}\Big((\int_\Omega |f|^p\,d\mu)^{1/p}+(\int_\Omega |g|^p\,d\mu)^{1/p}\Big).$$

Обозначим A интеграл слева. Так как $1/p+1/q=1$, то $A=A^{1/p}A^{1/q}$. Отсюда и из предыдущего неравенства следует (1.6.7). ◄

1.6.12. Теорема. *Пусть даны пространство с мерой* $(\Omega_1,\mathcal{F}_1,\mu)$, *измеримое пространство* $(\Omega_2,\mathcal{F}_2)$, *измеримая функция* $f\colon\Omega_2\to\overline{\mathbb{R}}$, *измеримое отображение* $L\colon\Omega_1\to\Omega_2$. *Тогда функция* $\mu L^{-1}\{A\}=\mu\{L^{-1}(A)\}$, $A\in\mathcal{F}_2$, *является мерой и выполняется равенство*

$$\int_{\Omega_2} f(\omega_2)\mu L^{-1}\{d\omega_2\}=\int_{\Omega_1} f(L(\omega_1))\mu\{d\omega_1\} \tag{1.6.8}$$

в том смысле, что из существования одного из этих интегралов вытекает существование другого и оба интеграла равны.

► Тот факт, что функция μL^{-1} является мерой на $\mathcal{F}_2$, следует из свойств прообразов, перечисленных в теореме 1.2.10.

Равенство (1.6.8) нетрудно доказать для любой $\mathcal{F}_2$-простой измеримой функции f. Отсюда, в силу теорем 1.5.9 и 1.6.3, следует, что равенство (1.6.8) выполняется для любой неотрицательной $\mathcal{F}_2$-измеримой функции f. Общий случай следует из представления $f=f^+-f^-$ и свойства линейности интегралов. ◄

1.6.13. Определение. Пусть существует интеграл $\int_\Omega f d\mu$ измеримой функции $f\colon\Omega\to\overline{\mathbb{R}}$. Функция $\int_A f\,d\mu=\int_\Omega f\mathbb{1}_A\,d\mu$, $A\in\mathcal{F}$, называется *неопределенным интегралом* функции f.

Подчеркнем, что существование интеграла $\int_\Omega f\,d\mu$ влечет существование интеграла $\int_A f\,d\mu$ для любого $A\in\mathcal{F}$.

1.6.14. Теорема. *Пусть даны пространство* $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ *со счетно-конечной мерой и измеримая функция* $g\colon\Omega\to\overline{\mathbb{R}}$ *такая, что интеграл* $\int_\Omega g\,d\mu$ *существует. Обозначим* $\mu_g\{A\}=\int_A g\,d\mu$, $A\in\mathcal{F}$.

(i) *Функция* μ_g *является счетно-конечным зарядом.*

(ii) *Если* $g\ge 0$, *то функция* μ_g *является счетно-конечной мерой и*

$\int_\Omega fg\,d\mu = \int_\Omega f\,d\mu_g$ *для любой измеримой функции* $f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, *для которой существует один из указанных интегралов.*
(iii) *Если* g *– интегрируемая функция, то* μ_g *– конечный заряд.*

► Утверждение (ii) следует из теоремы 1.6.3. Действительно, если множество $A = \cup_{n=1}^\infty A_n$ является объединением счетного числа попарно непересекающихся измеримых множеств, то

$$\mu\{A\} = \int_\Omega \mathbb{1}_A\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_k}\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n \mu\{A_k\} = \sum_{k=1}^\infty \mu\{A_k\}.$$

Утверждения (i) и (iii) являются следствиями утверждения (ii) и определения интеграла $\int_\Omega g\,d\mu = \int_\Omega g^+\,d\mu - \int_\Omega g^-\,d\mu$. Далее, равенство $\int_\Omega g\,d\mu = \int_\Omega f\,d\mu_g$ следует из теоремы 1.6.12. ◄

1.6.15. Теорема. *Пусть даны пространство* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *со счетно-конечной мерой и измеримые функции* $f, g\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$. *Если интегралы* $\int_\Omega f\,d\mu$ *и* $\int_\Omega g\,d\mu$ *существуют и для любого* $A \in \mathcal{F}$ *выполняется неравенство* $\int_A g\,d\mu \le \int_A f\,d\mu$, *то* $g \le f$ *п.в.*

► Предположим, что мера μ конечна. Обозначим

$$\Omega_1 = \{g > f, |f| < \infty, |g| < \infty\}, \Omega_2 = \{f = -\infty, g > -\infty\}.$$

Достаточно убедиться, что множества Ω_1 и Ω_2 имеют нулевую меру. Обозначим $A_{n,\varepsilon} = \{g > f + \varepsilon, |f| \le n, |g| \le n\}$ для любых $\varepsilon > 0$ и $n \in \mathbb{N}$. Так как функции f и g измеримы, то $A_{\varepsilon,n} \in \mathcal{F}$. Из условия теоремы следует, что

$$\varepsilon\mu\{A_{\varepsilon,n}\} \le \int_{A_{\varepsilon,n}} (g - f)\,d\mu = \int_{A_{\varepsilon,n}} g\,d\mu - \int_{A_{\varepsilon,n}} f\,d\mu \le 0.$$

Отсюда, в свою очередь, следует, что

$$\mu\{g > f + \varepsilon, |f| < \infty, |g| < \infty\} \le \sum_{n=1}^\infty \mu\{A_{\varepsilon,n}\} = 0,$$

$$\mu\{\Omega_1\} \le \sum_{m=1}^\infty \mu\{g > f + \frac{1}{m}, |f| < \infty, |g| < \infty\} = 0.$$

Обозначим $A_n = \{f = -\infty, g > -n\}$. Из неравенств

$$-n \cdot \mu\{A_n\} = \int_{A_n} g\,d\mu \le \int_{A_n} f\,d\mu = -\infty \cdot \mu\{A_n\}$$

следует, что $\mu\{A_n\} = 0$ и $\mu\{\Omega_2\} \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu\{A_n\} = 0$.

Предположим теперь, что мера μ счетно-конечна. Найдутся попарно непересекающиеся множества $C_n \in \mathcal{F}, n \in \mathbb{N}$, такие, что $\Omega = \cup_{n=1}^{\infty} C_n$ и $\mu\{C_n\} < \infty$. По условию для любого $A \in \mathcal{F}$ выполняется неравенство $\int_{A\cap C_n} f\,d\mu \le \int_{A\cap C_n} g\,d\mu$. По доказанному выше выполняется неравенство $f \le g$ п.в. на множестве C_n для любого $n \in \mathbb{N}$. Отсюда следует, что $f \le g$ п.в. ◄

Перед следствием 1.6.6 была определена норма $\|f\|_p$ функции $f \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Очевидно, что она удовлетворяет условиям: $\|f\|_p \ge 0$ и $\|cf\|_p = |c|\|f\|_p$ для любого $c \in \mathbb{R}$. Равенство $\|f\|_p = 0$ равносильно равенству $f = 0$ п.в. Если $p \ge 1$, то выполняется неравенство треугольника $\|f - g\|_p \le \|f - \phi\|_p + \|\phi - g\|_p$ для любых функций $f, g, \phi \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.

Последовательность $\{f_n\}_{n\ge1}$ функций из $\mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *сходится по норме* $\|\cdot\|_p$ к функции $f \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, если $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$. Последовательность $\{f_n\}_{n\ge1}$ называется *фундаментальной* по норме $\|\cdot\|_p$, если $\lim_{n,m\to\infty} \|f_n - f_m\|_p = 0$.

1.6.16. Теорема. *Любая фундаментальная по норме $\|\cdot\|_p$ последовательность $\{f_n\}_{n\ge1}$ функций из $\mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{F}, \mu), p \ge 1$, сходится по норме $\|\cdot\|_p$ к некоторой функции $f \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.*

► Пусть функции $f_n \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{F}, \mu), n \in \mathbb{N}$, удовлетворяют условию $\lim_{n,m\to\infty} \|f_n - f_m\|_p = 0$. По неравенству Маркова – Чебышева, $\varepsilon^p \mu\{|f_n - f_m| > \varepsilon\} \le \|f_n - f_m\|_p^p, \varepsilon > 0$, последовательность $\{f_n\}_{n\ge1}$ фундаментальна по мере. По теореме Рисса (теорема 1.5.14) существует подпоследовательность $\{f_{k_n}\}_{n\ge1}$, которая сходится п.в. к некоторой измеримой функции $f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$. По теореме 1.6.4 выполняются следующие соотношения

$$\|f\|_p \le \liminf_{m\to\infty} \|f_{k_m}\|_p \le \sup_{n\ge1} \|f_n\|_p < \infty,$$

$$\|f - f_n\|_p \le \liminf_{m\to\infty} \|f_{k_m} - f_n\|_p \le \sup_{m\ge n} \|f_m - f_n\|_p.$$

Отсюда следует, что $f \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ и $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p = 0$. ◄

Следующая теорема, принадлежащая Витали (Giuseppe Vitali), содержит достаточные условия для сходимости последовательностей функций в среднем данного порядка.

1.6.17. Теорема. *Если последовательность $\{f_n\}_{n\ge1}$ функций $f_n \in \mathcal{L}_p = \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{F}, \mu), p \ge 1$, сходится п.в. или по мере к функции $f \in \mathcal{L}_p$ и $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_p = \|f\|_p$, то $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f - f_n|^p\,d\mu = 0$.*

► Предположим, что $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ п.в. Заметим, что последовательность $\{2^p(|f_n|^p+|f|^p)-|f_n-f|^p\}_{n\geq 1}$ неотрицательных функций сходится почти всюду к функции $2^{p+1}|f|^p$. С помощью теоремы 1.6.4 можно убедиться, что

$$2^{p+1}\int_\Omega |f|^p\, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty}\int_\Omega (2^p(|f_n|^p+|f|^p)-|f_n-f|^p)\, d\mu =$$
$$= 2^{p+1}\int_\Omega |f|^p\, d\mu - \limsup_{n\to\infty}\int_\Omega |f_n-f|^p\, d\mu.$$

Отсюда следует, что $\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |f-f_n|^p\, d\mu = 0$.

Пусть $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ по мере и $\limsup_{n\to\infty}\int_\Omega |f_n - f|^p\, d\mu > 0$. Тогда $\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |f_{k_n} - f|^p\, d\mu = c > 0$ для некоторой последовательности $\{f_{k_n}\}_{n\geq 1}$. Можно считать, что $\lim_{n\to\infty} f_{k_n} = f$ п.в. В противном случае по теореме 1.5.14 найдется подпоследовательность последовательности $\{f_{k_n}\}_{n\geq 1}$, которая сходится п.в. к f. По доказанному выше $c = 0$ и, следовательно, $\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |f_n - f|^p\, d\mu = 0$. ◄

Теорему Витали существенным образом дополняет следующая теорема, известная как *теорема об ограниченной сходимости.*

1.6.18. Теорема. *Если последовательность $\{f_n\}_{n\geq 1}$ функций $f_n \in \mathcal{L}_p(\Omega,\mathcal{F},\mu), p \geq 1$, сходится п.в. или по мере к измеримой функции $f\colon \Omega\to\overline{\mathbb{R}}$ и $g = \sup_{n\in\mathbb{N}}|f_n| \in \mathcal{L}_p$, то $f \in \mathcal{L}_p(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ и*

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |f-f_n|^p\, d\mu = 0.$$

► Предположим, что $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ п.в. Так как $|f_n| \leq |g|$, то $|f| \leq |g|$ п.в. По теореме 1.6.8 функция $|f|^p$ интегрируема. Заметим, что $2^p g^p - |f_n - f|^p \geq 0$ п.в. и $\lim_{n\to\infty}(2^p g^p - |f_n - f|^p) = 2^p g^p$ п.в. По теореме 1.6.4 выполняются следующие соотношения

$$\int_\Omega 2^p g^p\, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty}\int_\Omega (2^p g^p - |f-f_n|^p)\, d\mu =$$
$$= \int_\Omega 2^p g^p\, d\mu - \limsup_{n\to\infty}\int_\Omega |f-f_n|^p\, d\mu.$$

Отсюда следует, что $\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |f-f_n|^p\, d\mu = 0$.

Если $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ по мере, то по аналогии с доказательством теоремы 1.6.17, можно убедиться, что $\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |f_n - f|^p d\mu = 0$. ◄

Если Ω является евклидовым пространством $\mathbb{R}^d$, то пространство $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mu)$ обладает рядом специальных свойств, два из которых описаны в следующих двух теоремах.

1.6.19. Теорема. *Пусть дана мера* $\mu\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to \overline{\mathbb{R}}_+$, *конечная на каждом шаре* $\mu\{B_r\} < \infty$ *конечного радиуса* $r > 0$. *Тогда для любой функции* $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mu), p \geq 1$, *существуют непрерывные функции* $g_n, n \in \mathbb{N}$, *из* $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mu)$ *такие, что*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |g_n(x) - f(x)|^p \mu\{dx\} = 0. \tag{1.6.9}$$

► В силу теоремы 1.5.9, следствия 1.5.10 и теоремы 1.6.18 существует последовательность $\{f_n\}_{n\geq 1}$ простых функций из пространства $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mu)$ такая, что $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$. Если для любого $n \in \mathbb{N}$ существует непрерывная функция g_n такая, что $\|f_n - g_n\|_p < 1/n$, то $\|g_n - f\|_p \leq \|g_n - f_n\|_p + \|f_n - f\|_p \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому теорему достаточно доказать для любой простой функции $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mu)$. Функцию f можно записать в виде линейной комбинации $f = c_1 \mathbb{1}_{A_1} + \dots + c_m \mathbb{1}_{A_m}$ индикаторных функций измеримых множеств с вещественными коэффициентами. Теорему достаточно доказать для любой индикаторной функции $f = \mathbb{1}_A \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mu)$. Множество $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ должно иметь конечную меру μ. По теореме Лузина (теорема 1.5.17) для любого $\varepsilon > 0$ существует непрерывная функция $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ с компактным носителем $B \subseteq A$ такая, что

$$\mu\{g \neq \mathbb{1}_A\} < \frac{\varepsilon}{2^p(\mu\{A\} + 1)}, \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |g(x)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_A = 1.$$

Отсюда следует, что $\|g - f\|_p \leq \varepsilon$. Для $\varepsilon = 1/n, n \in \mathbb{N}$ найдется непрерывная функция g_n такая, что $\|g_n - f\|_p < 1/n$. Требуемые функции $g_n, n \in \mathbb{N}$, построены. ◄

1.6.20. Теорема. *Пусть дана борелевская функция* $f\colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$. *Если интеграл Лебега* $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx, p \geq 1$, *конечен, то*

$$\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}} |f(x+t) - f(x)|^p dx = 0. \tag{1.6.10}$$

► Мера Лебега удовлетворяет условию из теоремы 1.6.19. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется непрерывная функция $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такая, что $\int_{\mathbb{R}} |g(x) - f(x)|^p dx < 2^{-2p-1}\varepsilon$. По теореме 1.4.29 мера Лебега инвариантна относительно сдвигов, и, следовательно,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x+t) - g(x+t)|^p dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x)|^p dx < \frac{\varepsilon}{2^{2p+1}}.$$

С помощью знакомого неравенства $|a+b|^p \le 2^p(|a|^p+|b|^p)$ для $a, b \in \mathbb{R}$ можно убедиться, что

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x+t)-f(x)|^p dx \le 2^p \int_{\mathbb{R}} |g(x+t)-g(x)|^p dx+$$
$$+ 2^{2p} \int_{\mathbb{R}} |f(x+t)-g(x+t)|^p dx + 2^{2p} \int_{\mathbb{R}} |f(x)-g(x)|^p dx \le$$
$$\le 2^p \int_{\mathbb{R}} |g(x+t)-g(x)|^p dx + \varepsilon.$$

Ниже будет доказано, что

$$\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}} |g(x+t)-g(x)|^p dx = 0. \qquad (1.6.11)$$

Отсюда следует, что $\limsup_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}} |f(x+t)-f(x)|^p dx \le \varepsilon$. Тем самым будет доказано (1.6.10), так как число $\varepsilon > 0$ можно взять произвольно малым. Докажем (1.6.11). Возьмем произвольную последовательность $\{t_n\}_{n\ge 1}$, сходящуюся к нулю. Так как функция g непрерывна, то $\lim_{n\to\infty} g(x+t_n) = g(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Выше отмечалось, что мера Лебега обладает свойством инвариантности, и, следовательно, $\int_{\mathbb{R}} |g(x+t_n)-g(x)|^p\, dx$. Требуемое утверждение (1.6.11) выполняется по теореме Витали. ◀

1.6.21. Интегрирование комплексных функций. Функцию $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ с комплексными значениями можно записать в виде линейной комбинации $f = f_1 + if_2$ вещественных функций, где $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица. Функция f называется *измеримой* (*интегрируемой*), если f_1 и f_2 – измеримые (интегрируемые) функции. Интеграл функции $f = f_1 + if_2$ по мере μ определяется по формуле $\int_\Omega f d\mu = \int_\Omega f_1 d\mu + i \int_\Omega f_2 d\mu$. Так как $|f|^2 = |f_1|^2 + |f_2|^2$, $|f_1| \le |f|$, $|f_2| \le |f|$, то комплексная функция интегрируема тогда и только тогда, когда ее модуль – интегрируемая функция. На интегралы комплексных функций распространяются многие теоремы, доказанные в этом параграфе для вещественных функций.

1.7. Прямое произведение мер

Имеется правило построения мер на декартовых произведениях пространств с мерами по мерам из пространств-сомножителей.

1.7.1. Определение. Пусть даны множества Ω и Ω'. Для любого множества $A \subseteq \Omega \times \Omega'$ и для любых точек $\omega \in \Omega$ и $\omega' \in \Omega'$ множество $A_\omega = \{\omega' \in \Omega' \colon (\omega, \omega') \in A\}$ и аналогичное множество $A^{\omega'} = \{\omega \in \Omega \colon (\omega, \omega') \in A\}$ называются *сечениями* множества A в точках ω и ω'. Для любой функции двух переменных $f \colon \Omega \times \Omega' \to \overline{\mathbb{R}}$ функция $f_\omega(\omega') = f(\omega, \omega'), \omega' \in \Omega'$, и аналогичная функция $f^{\omega'}(\omega) = f(\omega, \omega'), \omega \in \Omega$, называются *сечениями* функции f в точках ω и ω'.

1.7.2. Теорема. *Пусть* $(\Omega \times \Omega', \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}')$ *является прямым произведением измеримых пространств* $(\Omega, \mathcal{F})$ *и* $(\Omega', \mathcal{F}')$. *Тогда все сечения любого множества* $A \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}'$ *измеримы и все сечения любой измеримой функции* $f \colon \Omega \times \Omega' \to \overline{\mathbb{R}}$ *измеримы.*

► Докажем, например, что сечение A_ω произвольного множества $A \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}'$ в любой точке $\omega \in \Omega$ принадлежит сигма-алгебре $\mathcal{F}'$. Обозначим $\mathcal{L}_\omega$ класс множеств $A \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}'$ таких, что $A_\omega \in \mathcal{F}'$. Класс $\mathcal{L}_\omega$ содержит любой прямоугольник $A = E \times F$ со сторонами $E \in \mathcal{F}$ и $F \in \mathcal{F}'$, так как $A_\omega = F \in \mathcal{F}'$, если $\omega \in E$, и $A_\omega = \varnothing \in \mathcal{F}'$, если $\omega \notin E$. Нетрудно убедиться, что класс $\mathcal{L}_\omega$ является σ-алгеброй. По теореме 1.2.7 выполняется равенство $\mathcal{L}_\omega = \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}'$.

Аналогично можно доказать второе утверждение. Докажем, например, что для любого $\omega \in \Omega$ функция $f_\omega \colon \Omega' \to \overline{\mathbb{R}}$ является $\mathcal{F}'$-измеримой. Утверждение справедливо для любой простой функции $f = \sum_{k=1}^n c_k \mathbb{1}_{A_k}$, $A_k \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}', c_k \in \mathbb{R}, k = 1, \ldots, n$, так как $f_\omega = \sum_{k=1}^n c_k \mathbb{1}_{(A_k)_\omega}$. Далее, по следствию 1.5.10 произвольная измеримая функция $f \colon \Omega \times \Omega' \to \overline{\mathbb{R}}$ является поточечным пределом простых функций $f_n \colon \Omega \times \Omega' \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. Сечение f_ω измеримо относительно $\mathcal{F}'$ по теореме 1.5.7, так как $f_\omega = \lim_{n\to\infty} (f_n)_\omega$. ◄

1.7.3. Теорема. *Для любых пространств со счетно-конечными мерами* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *и* $(\Omega', \mathcal{F}', \mu')$ *функция* $\mu \otimes \mu' \colon \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}' \to \overline{\mathbb{R}}_+$,

$$(\mu \otimes \mu')\{A\} = \int_\Omega \mu'\{A_\omega\}\mu\{d\omega\} = \int_{\Omega'} \mu\{A^{\omega'}\}\mu'\{d\omega'\},$$

является счетно-конечной мерой. Она однозначно определяется условием

$$(\mu \otimes \mu')\{A \times B\} = \mu\{A\}\mu'\{B\}, A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{F}'. \tag{1.7.1}$$

► Теорему достаточно доказать для конечных мер μ и μ'. Обозначим

$\mathcal{L}$ класс множеств $A \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}'$, для которых выполняется равенство

$$\int_{\Omega} \mu'\{A_{\omega}\}\mu\{d\omega\} = \int_{\Omega'} \mu\{A^{\omega'}\}\mu'\{d\omega'\}. \tag{1.7.2}$$

Нетрудно видеть, что класс $\mathcal{L}$ является λ-классом. Он содержит все прямоугольники $E \times F$ со сторонами $E \in \mathcal{F}$ и $F \in \mathcal{F}'$. Действительно, оба интеграла в (1.7.2) равны $\mu\{E\}\mu'\{F\}$. Заметим, что класс всех измеримых прямоугольников является π-классом и порождает сигма-алгебру $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}'$. По теореме 1.2.7 выполняется равенство $\mathcal{L} = \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}'$. Функция $\mu \otimes \mu'$ является конечной мерой. Действительно, если множество $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ является объединением попарно непересекающихся множеств $A_n \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}'$, то, в силу теоремы 1.6.3,

$$\int_{\Omega'} \mu\{A^{\omega'}\}\mu'\{d\omega'\} = \int_{\Omega'} \lim_{n\to\infty} \mu\{\cup_{k=1}^{n} A^{\omega'}\}\mu'\{d\omega'\} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{\Omega'} \mu\{A_k^{\omega'}\}\mu'\{d\omega'\} = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Omega'} \mu\{A_k^{\omega'}\}\mu'\{d\omega'\}.$$

Единственность меры $\mu \otimes \mu'$ обеспечивается теоремой 1.4.6. ◀

1.7.4. Следствие. *Для любых пространств со счетно-конечными мерами* $(\Omega_k, \mathcal{F}_k, \mu_k), k = 1, \ldots, d$, *существует единственная счетно-конечная мера* $\otimes_{k=1}^{d} \mu_k \colon \otimes_{k=1}^{d} \mathcal{F}_k \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *со свойством*

$$(\otimes_{k=1}^{d} \mu_k)\{\times_{k=1}^{d} A_k\} = \prod_{k=1}^{d} \mu_k\{A_k\}, A_k \in \mathcal{F}_k, k = 1, \ldots, d.$$

Мера $\otimes_{k=1}^{d} \mu_k \colon \otimes_{k=1}^{d} \mathcal{F}_k \to \overline{\mathbb{R}}_+$, о которой говорится в следствии 1.7.4, называется *прямым произведением* мер $\mu_1, \ldots, \mu_d$. Пространство с мерой $(\times_{k=1}^{d} \Omega_k, \otimes_{k=1}^{d} \mathcal{F}_k, \otimes_{k=1}^{d} \mu_k)$ называется *прямым произведением* пространств с мерами $(\Omega_k, \mathcal{F}_k, \mu_k)$, $k = 1, \ldots, d$.

Пусть дана измеримая функция $f \colon \Omega \times \Omega' \to \overline{\mathbb{R}}$. Если функция f интегрируема по мере $\mu \otimes \mu'$, то ее (двумерный) интеграл обозначается $\int_{\Omega\times\Omega'} f d(\mu \otimes \mu')$ или $\int_{\Omega\times\Omega'} f(\omega, \omega')(\mu \otimes \mu')\{d(\omega, \omega')\}$. Предположим, что сечение f_{ω} в некоторой точке $\omega \in \Omega$ является μ'-интегрируемой функцией. Ее интеграл будет обозначаться $\int_{\Omega'} f \mu'\{d\omega'\}$ или $\int_{\Omega'} f_{\omega} \mu'\{d\omega'\}$. Предположим теперь, что интеграл $\int_{\Omega'} f \mu'\{d\omega'\}$ существует для всех ω из некоторого множества

$F \in \mathcal{F}, \mu\{F^c\} = 0$. Если функция $\phi(\omega) = \int_{\Omega'} f(\omega, \omega')\mu\{d\omega'\}, \omega \in F$, интегрируема, то ее можно доопределить на всем Ω таким образом, что доопределенная функция будет измеримой и интегрируемой. Ее интеграл можно записать в виде повторного интеграла $\int_\Omega \phi d\mu = \int_\Omega \int_{\Omega'} f(\omega, \omega')\mu'\{d\omega'\}\mu\{d\omega\}$. Сказанное в равной мере относится к любому сечению $f^{\omega'}, \omega' \in \Omega'$.

1.7.5. Теорема. *Пусть* $(\Omega\times\Omega', \mathcal{F}\otimes\mathcal{F}', \mu\otimes\mu')$ *является прямым произведением пространств со счетно-конечными мерами* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *и* $(\Omega', \mathcal{F}', \mu')$. *Тогда для любой измеримой функции* $f\colon \Omega \times \Omega' \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *функции* $\int_\Omega f(\omega, \omega')\mu\{d\omega\}, \omega' \in \Omega'$, *и* $\int_{\Omega'} f(\omega, \omega')\mu'\{d\omega'\}, \omega \in \Omega$, *соответственно* $\mathcal{F}'$ *и* $\mathcal{F}$*-измеримы и справедливы равенства*

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\times\Omega'} f d(\mu\otimes\mu') &= \int_\Omega \int_{\Omega'} f(\omega, \omega')\mu'\{d\omega'\}\mu\{d\omega\} = \\ &= \int_{\Omega'} \int_\Omega f(\omega, \omega')\mu\{d\omega\}\mu'\{d\omega'\}.\end{aligned} \tag{1.7.3}$$

► Совсем просто доказать теорему для простых функций. По теореме 1.5.9 для любой измеримой функции $f\colon \Omega \times \Omega' \to \overline{\mathbb{R}}_+$ найдутся простые функции $f_n\colon \Omega \times \Omega' \to \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N}$, такие, что $f_n \uparrow f$ при $n \uparrow \infty$. Теорема справедлива для $f = f_n$. Полагая $n \uparrow \infty$, можно убедиться, что теорема справедлива для f. ◄

1.7.6. Теорема. *Пусть* $(\Omega\times\Omega', \mathcal{F}\otimes\mathcal{F}', \mu\otimes\mu')$ *является прямым произведением пространств со счетно-конечными мерами* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *и* $(\Omega', \mathcal{F}', \mu')$. *Если измеримая функция* $f\colon \Omega\times\Omega' \to \overline{\mathbb{R}}$ *интегрируема по мере* $\mu\otimes\mu'$, *то функция* $\int_\Omega f(\omega, \omega')\mu\{d\omega\}, \omega' \in \Omega'$, *интегрируема по мере* μ', *функция* $\int_{\Omega'} f(\omega, \omega')\mu'\{d\omega'\}, \omega \in \Omega$, *интегрируема по мере* μ, *и выполняются равенства* (1.7.3).

► Достаточно применить предыдущую теорему к положительной и отрицательной частям $f^\pm$ функции f, а затем воспользоваться равенством $f = f^+ - f^-$ и линейным свойством интегралов. ◄

Теоремы 1.7.5 и 1.7.6 доказали Тонелли (Leonida Tonelli) и Фубини (Guido Fubini). Они называются *теоремами Фубини.* Теоремы Тонелли – Фубини позволяют сводить вычисление некоторых интегралов по мере к вычислению интегралов по мере Лебега.

1.7.7. Теорема. *Пусть даны пространство с мерой* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *и измеримая функция* $f\colon \Omega \to \mathbb{R}_+$. *Если функция* f^p *интегрируема для некоторого* $0 < p < \infty$, *то*

$$\int_\Omega f^p \, d\mu = p \int_0^\infty x^{p-1}\mu\{f > x\}\, dx.$$

▶ Требуемое равенство является следствием теоремы Фубини

$$\int_\Omega f^p d\mu = p\int_\Omega\int_0^\infty x^{p-1}\mathbb{1}_{[0,f(\omega))}(x)dx\mu\{d\omega\} = p\int_0^\infty x^{p-1}\mu\{f > x\}dx. \blacktriangleleft$$

1.8. Абсолютно непрерывные заряды

Несколько зарядов, определенных на одной сигма-алгебре, могут находиться в определенном отношении друг к другу. Абсолютная непрерывность и сингулярность одной меры относительно другой представляют примеры таких отношений.

1.8.1. Определение. Пусть некоторые внешняя мера μ^* и заряд λ определены на некоторой σ-алгебре $\mathcal{F} \subseteq 2^\Omega$. Заряд λ называется *абсолютно непрерывным* относительно внешней меры μ^*, если $\lambda\{E\} = 0$ для любого $E \in \mathcal{F}$, для которого $\mu^*\{E\} = 0$. Заряд λ называется *сингулярным* относительно внешней меры μ^*, если существует множество $\Omega^* \in \mathcal{F}$ такое, что $\mu^*\{\Omega^*\} = 0$ и $\lambda\{E \setminus \Omega^*\} = 0$ для любого множества $E \in \mathcal{F}$.

Напомним, что 2^Ω обозначает класс всех подмножеств множества Ω. Понятие сингулярности представляет собой отрицание понятия абсолютной непрерывности. Действительно, заряд λ, будучи сингулярным относительно внешней меры μ^*, может принимать ненулевые значения только на множествах, на которых внешняя мера равна нулю. Далее будут использоваться записи $\lambda \ll \mu^*$ и $\lambda \perp \mu^*$ для обозначения абсолютной непрерывности и сингулярности заряда λ относительно внешней меры μ^*.

1.8.2. Теорема. *Пусть внешняя мера* μ^* *и заряды* $\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *определены на некоторой сигма-алгебре* $\mathcal{F} \subseteq 2^\Omega$.

(i) *Если* $\lambda_k \ll \mu$ *для всех* $k = 1, \ldots, n$, *то* $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n \ll \mu^*$.

(ii) *Если* $\lambda_k \perp \mu^*$ *для всех* $k = 1, \ldots, n$, *то* $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n \perp \mu^*$.

(iii) *Если* $\lambda \ll \mu^*$, *то* $\lambda^+ \ll \mu^*$ *и* $\lambda^- \ll \mu^*$.

(iv) *Если* $\lambda \ll \mu^*$ *и* $\lambda \perp \mu^*$, *то* $\lambda = 0$.

▶ (i). Если $\mu^*\{E\} = 0$ для некоторого $E \in \mathcal{F}$, то $\lambda_k\{E\} = 0$ для всех $k = 1, \ldots, n$ и, следовательно, $\lambda_1\{E\} + \cdots + \lambda_n\{E\} = 0$.

(ii). По предположению для каждого $k = 1, \ldots, n$ существует множество $\Omega_k^* \in \mathcal{F}$ такое, что $\mu^*\{\Omega_k^*\} = 0$ и $\lambda_k\{E \setminus \Omega_k^*\} = 0$ для любого $E \in \mathcal{F}$. Заметим, что $\Omega^* = \cup_{k=1}^n \Omega_k^* \in \mathcal{F}$ и $\mu^*\{\Omega^*\} = 0$, а также $\lambda_1\{E \setminus \Omega^*\} + \cdots + \lambda_n\{E \setminus \Omega^*\} = 0$ для любого $E \in \mathcal{F}$.

(iii). По теореме 1.4.9 заряд λ можно записать в виде разности

$\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$ двух мер. Утверждение следует из (i).

(iv). Так как $\lambda \perp \mu^*$, то существует множество $\Omega^* \in \mathcal{F}$ такое, что $\mu^*\{\Omega^*\} = 0$ и $\lambda\{E \setminus \Omega^*\} = 0$ для любого $E \in \mathcal{F}$. Так как $\lambda \ll \mu^*$, то $\lambda\{E \cap \Omega^*\} = 0$. Отсюда и из аддитивности заряда следует, что $\lambda\{E\} = \lambda\{E \cap \Omega^*\} + \lambda\{E \setminus \Omega^*\} = 0$ для всех $E \in \mathcal{F}$. ◀

Следующее утверждение называется теоремой Лебега о разложении заряда. Лебег (Henri Léon Lebesgue) доказал эту теорему для мер. Доказанное обобщение принадлежит Брукс (Brooks J. K.).

1.8.3. Теорема. *Пусть внешняя мера* μ^* *и счетно-конечный заряд* λ *определены на некоторой* σ*-алгебре* $\mathcal{F} \subseteq 2^\Omega$. *Тогда существуют однозначно определенные заряды* $\lambda_1, \lambda_2 \colon \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}$ *такие, что*

$$\lambda_1 \ll \mu^*, \lambda_2 \perp \mu^*, \lambda = \lambda_1 + \lambda_2.$$

▶ По теореме 1.4.9 заряд λ можно записать в виде разности $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$ двух мер, одна из которых конечна, а другая является счетно-конечной. Поэтому теорему достаточно доказать для счетно-конечных мер. Предположим, что λ является конечной мерой. Обозначим $\mathcal{R} = \{E \colon E \in \mathcal{F}, \mu^*\{E\} = 0\}$ и $\alpha = \sup\{\lambda\{E\} \colon E \in \mathcal{R}\}$. Заметим, что $0 \le \alpha \le \lambda\{\Omega\} < \infty$. Существуют множества $E_n \in \mathcal{R}, n \in \mathbb{N}$, такие, что $\lim_{n\to\infty} \lambda\{E_n\} = \alpha$. Обозначим $\Omega^* = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$. Заметим, что $\Omega^* \in \mathcal{R}$ и $\lambda\{E_n\} \le \lambda\{\Omega^*\} \le \alpha$. Из этих неравенств следует равенство $\lambda\{\Omega^*\} = \alpha$. Докажем, что

$$\lambda\{E \setminus \Omega^*\} = 0 \text{ для любого } E \in \mathcal{R}. \tag{1.8.1}$$

Действительно, если $\lambda\{E_0 \setminus \Omega^*\} > 0$ для некоторого $E_0 \in \mathcal{R}$, то $\lambda\{E_0 \cup \Omega^*\} = \lambda\{\Omega^*\} + \lambda\{E_0 \setminus \Omega^*\} > \lambda\{\Omega^*\} = \alpha$. Это противоречит определению величины α. Определим меры $\lambda_1, \lambda_2 \colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}_+$,

$$\lambda_1\{E\} = \lambda\{E \setminus \Omega^*\}, \lambda_2\{E\} = \lambda\{E \cap \Omega^*\}, E \in \mathcal{F}.$$

Заметим, что $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$. Если $\mu^*\{E\} = 0$ для некоторого $E \in \mathcal{F}$, то $E \in \mathcal{R}$ и $\lambda_1\{E\} = \lambda\{E \setminus \Omega^*\} = 0$ в силу (1.8.1) и, следовательно, $\lambda_1 \ll \mu^*$. Далее, $\lambda_2\{E \setminus \Omega^*\} = \lambda\{(E \setminus \Omega^*) \cap \Omega^*\} = 0$ для любого $E \in \mathcal{F}$, и, следовательно, $\lambda_2 \perp \mu^*$.

Предположим теперь, что λ является счетно-конечной мерой. Существуют попарно непересекающиеся множества $E_n \in \mathcal{F}, n \in \mathbb{N}$, такие, что $\Omega = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ и $\lambda\{E_n\} < \infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Определим конечные меры $\lambda_n\{E\} = \lambda\{E \cap E_n\}, E \in \mathcal{F}, n \in \mathbb{N}$. По доказанному выше существуют конечные меры $\lambda'_n\{E\cap E_n\}$ и $\lambda''_n\{E\cap E_n\}, E\in\mathcal{F}$, такие, что $\lambda'\ll\mu^*$ и $\lambda''\perp\mu^*$ и $\lambda_n=\lambda'_n+\lambda''_n$. Обозначим меры $\lambda'=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda'_n$ и $\lambda''=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda''_n$. Заметим, что $\lambda=\lambda'+\lambda''$. По аналогии с доказательством теоремы 1.8.2 можно убедиться, что $\lambda'\ll\mu^*$ и $\lambda''\perp\mu^*$. Единственность мер μ' и μ'' доказана в теореме 1.8.2. ◀

1.8.4. Теорема. *Пусть меры* $\mu,\nu\colon\mathcal{F}\to\mathbb{R}_+$ *определены на некоторой* σ-*алгебре* $\mathcal{F}\subseteq 2^{\Omega}$. *Если* $\nu\ll\mu$ *и* $\nu\{\Omega\}>0$, *то существуют число* $\varepsilon>0$ *и положительное множество* $A\in\mathcal{F}$ *относительно заряда* $\nu-\varepsilon\mu$ *положительной меры* $\mu\{A\}>0$.

▶ Обратим внимание, что речь идет о конечных мерах ν и μ. По теореме 1.4.8 существуют положительное множество A_n и отрицательное множество A_n^c относительно заряда $\nu-n^{-1}\mu, n\in\mathbb{N}$. Множество $B=\cap_{n=1}^{\infty}A_n^c$ является отрицательным относительно заряда $\nu-n^{-1}\mu$ для любого $n\in\mathbb{N}$. Поэтому $\nu\{B\}-n^{-1}\mu\{B\}\leq 0$. Отсюда следует, что $\nu\{B\}=0$. Так как $\nu\{B\}+\nu\{B^c\}=\nu\{\Omega\}>0$ и $B^c=\cup_{n=1}^{\infty}A_n$, то $\nu\{A_n\}>0$ для некоторого $n\in\mathbb{N}$. В качестве числа ε и множества A можно взять $\varepsilon=1/n$ и $A=A_n$. ◀

Ниже доказана важная теорема Радона–Никодима (Johann Karl Agust Radon, Otto Marcin Nikodym), содержащая описание абсолютно непрерывных зарядов.

1.8.5. Теорема. *Пусть счетно-конечный заряд* $\nu\colon\mathcal{F}\to\overline{\mathbb{R}}$ *и счетно-конечная мера* $\mu\colon\mathcal{F}\to\overline{\mathbb{R}}_+$ *определены на некоторой сигма-алгебре* $\mathcal{F}\subseteq 2^{\Omega}$. *Если* $\nu\ll\mu$, *то существует измеримая функция* $f\colon\Omega\to\mathbb{R}$ *такая, что*

$$\nu\{E\}=\int_E f\,d\mu \text{ для любого } E\in\mathcal{F}. \tag{1.8.2}$$

Если заряд ν *является мерой, то функция* f *неотрицательна. Если заряд* ν *конечен, то функция* f *интегрируема по мере* μ. *Если другая измеримая функция* $g\colon\Omega\to\mathbb{R}$ *удовлетворяет условию* (1.8.2), *то* $f=g$ *п.в. по отношению к мере* μ.

▶ Заметим, что использование символа интеграла неявно утверждает, что интеграл $\int_\Omega f\,d\mu$ существует и, следовательно, существует неопределенный интеграл $\int_E f\,d\mu, E\in\mathcal{F}$.

Предположим, что ν и μ являются конечными мерами. Обозначим $\mathcal{K}$ множество измеримых функций $f\colon\Omega\to\mathbb{R}_+$, удовлетворяющих неравенству $\int_E f\,d\mu\leq\nu\{E\}$ для любого $E\in\mathcal{F}$. Множество $\mathcal{K}$ не является пустым. Оно содержит, например, функцию, тождественно равную нулю. Так как $\int_\Omega f\,d\mu\leq\nu\{\Omega\}<\infty$, то величина $\alpha = \sup\{\int_\Omega f\,d\mu\colon f \in \mathcal{K}\}$ конечна. Существуют функции $f_n \in \mathcal{K}, n \in \mathbb{N}$, такие, что $\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n\,d\mu = \alpha$. Измеримые функции $g_n = \max\{f_1, \ldots, f_n\}, n \in \mathbb{N}$, образуют возрастающую последовательность. Заметим, что измеримые множества $E_1 = \{g_n = f_1\}$, $E_k = \{g_n = f_k\} \setminus \cup_{j=1}^{k-1}\{g_n = f_j\}, k = 2, \ldots, n$, попарно не пересекаются и выполняется равенство $\Omega = \cup_{k=1}^n E_k$. Если $E \in \mathcal{F}$, то

$$\int_E g_n\,d\mu = \sum_{k=1}^n \int_{E\cap E_k} f_k\,d\mu \le \sum_{k=1}^n \nu\{E \cap E_k\} = \nu\{E\}.$$

Тем самым доказано, что $g_n \in \mathcal{K}$. Неубывающая последовательность $\{g_n\}_{n\ge1}$ поточечно сходится к измеримой функции $g = \sup_{n\ge1} g_n$. По теореме 1.6.4 выполняются следующие соотношения

$$\alpha = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n\,d\mu \le \lim_{n\to\infty}\int_\Omega g_n\,d\mu = \int_\Omega g\,d\mu,$$
$$\int_E g\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_E g_n\,d\mu \le \nu\{E\}, E \in \mathcal{F}.$$

Так как $\int_\Omega g_n\,d\mu \le \alpha$, то $\int_\Omega g\,d\mu = \alpha$. По теореме 1.6.7 измеримое множество $\{g = \infty\}$ имеет нулевую меру μ. Измеримая функция $f = g\mathbb{1}_{\{g<\infty\}}\colon \Omega \to \mathbb{R}_+$ принадлежит $\mathcal{K}$, так как

$$\int_E f\,d\mu = \int_E g\,d\mu \le \nu\{E\} \text{ для любого } E \in \mathcal{F}.$$

Мера $\lambda\{E\} = \nu\{E\} - \int_E f\,d\mu, E \in \mathcal{F}$, конечна, так как является разностью двух конечных мер. Докажем, что она тождественно равна нулю. Предположим противное, что $\lambda\{\Omega\} > 0$. По теореме 1.8.4, применительно к мерам λ и μ, существуют число $\varepsilon > 0$ и положительное множество A относительно заряда $\lambda - \varepsilon\mu$ такое, что $\mu\{A\} > 0$. Так как $\lambda\{A \cap E\} - \varepsilon\mu\{A \cap E\} \ge 0$ для любого $E \in \mathcal{F}$, то

$$\begin{aligned}\int_E (f+\varepsilon\mathbb{1}_A)\,d\mu &= \int_E f\,d\mu + \varepsilon\mu\{A\cap E\} \le \int_E f\,d\mu + \lambda\{A \cap E\} = \\ &= \int_E f\,d\mu + \nu\{A\cap E\} - \int_{E\cap A} f\,d\mu = \int_{E\setminus A} f\,d\mu + \nu\{A \cap E\} = \\ &\le \nu\{E\setminus A\} + \nu\{E \cap A\} = \nu\{E\}.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что $f + \varepsilon \in \mathcal{K}$, а, с другой стороны,

$$\int_\Omega (f + \varepsilon\mathbb{1}_A)d\mu = \int_\Omega f d\mu + \varepsilon\mu\{A\} > \int f d\mu = \alpha.$$

Это противоречит определению величины α, и, следовательно,

$$\nu\{E\} - \int_E f d\mu = \lambda\{E\} = 0 \text{ для любого } E \in \mathcal{F}.$$

Предположим теперь, что ν – конечная мера, а μ – счетно-конечная мера. Имеются попарно непересекающиеся множества $E_n \in \mathcal{F}, n \in \mathbb{N}$, такие, что $\Omega = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ и $\mu\{E_n\} < \infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Так как $\nu \ll \mu$, то конечная мера $\nu\{E_n \cap E\}, E \in \mathcal{F}$, абсолютно непрерывна относительно конечной меры $\mu\{E_n \cap E\}, E \in \mathcal{F}$. Существует измеримая функция $f_n \colon \Omega \to \mathbb{R}_+$ такая, что

$$\nu\{E_n \cap E\} = \int_{E_n \cap E} f_n d\mu = \int_E f_n \mathbb{1}_{E_n} d\mu \text{ для любого } E \in \mathcal{F}.$$

Определим измеримую функцию $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \mathbb{1}_{E_n} \colon \Omega \to \mathbb{R}_+$. По теореме о монотонной сходимости справедливы равенства

$$\nu\{E\} = \sum_{k=1}^{\infty} \nu\{E_n \cap E\} = \lim_{n\to\infty} \int_E \sum_{k=1}^{n} f_k \mathbb{1}_{E_n}\, d\mu = \int_E f\, d\mu, E \in \mathcal{F}.$$

Обратим внимание, что функция f интегрируема по мере μ.

Докажем теорему в общем случае. По теореме 1.4.9 заряд ν можно записать в виде разности $\nu = \nu^+ - \nu^-$ двух мер $\nu^\pm \colon \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, одна из которых, например, ν^+ конечна. Так как $\nu \ll \mu$, то $\nu^\pm \ll \mu$ по теореме 1.8.2. По доказанному выше существует интегрируемая по мере μ функция $f' \colon \Omega \to \mathbb{R}_+$ такая, что

$$\nu^+\{E\} = \int_E f'\, d\mu \text{ для любого } E \in \mathcal{F}. \tag{1.8.3}$$

Счетно конечная-мера ν^- абсолютно непрерывна относительно меры μ. Существуют попарно непересекающиеся измеримые множества $F_n \in \mathcal{F}, n \in \mathbb{N}$, такие, что $\Omega = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$ и $\nu^-\{F_n\} < \infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Конечная мера $\nu^-\{F_n \cap E\}, E \in \mathcal{F}$, абсолютно непрерывна относительно меры μ. По доказанному выше для любого $n \in \mathbb{N}$ существует измеримая функция $f''_n \colon \Omega \to \mathbb{R}_+$ такая, что

$$\nu^-\{E_n \cap E\} = \int_{E_n \cap E} f''_n\, d\mu = \int_E f''_n \mathbb{1}_{E_n}\, d\mu \text{ для любого } E \in \mathcal{F}.$$

По теореме 1.6.3 измеримая функция $f'' = \sum_{n=1}^{\infty} f''_n \mathbb{1}_{E_n} : \Omega \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяет следующим условиям

$$\nu^-\{E\} = \sum_{n=1}^{\infty} \nu^-\{E_n \cap E\} = \lim_{n\to\infty} \int_E \sum_{k=1}^{n} f''_n \mathbb{1}_{E_n}\, d\mu = \int_E f''\, d\mu, E \in \mathcal{F}.$$

Отсюда и из (1.8.3) следует, что

$$\nu\{E\} = \nu^+\{E\} - \nu^-\{E\} = \int_E f'\, d\mu - \int_E f''\, d\mu = \int_E (f' - f'')\, d\mu$$

для любого $E \in \mathcal{F}$. Равенство (1.8.2) выполняется с $f = f' - f''$. Если заряд ν конечен, то мера ν^- конечна и, следовательно, функции f'' и $f = f' - f''$ интегрируемы. Выше было доказано, что функция f принимает положительные значения, если заряд ν является мерой.

Если другая измеримая функций g удовлетворяет (1.8.2), то $f = g$ п.в. по отношению к мере μ по теореме 1.6.15. ◀

Следующий пример показывает, что предположение о счетной конечности меры μ является существенным.

1.8.6. Пример. Определим меру $\mu\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+, \mu\{A\} = |A|$, где $|A|$ обозначает мощность множества $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Заметим, что $\mu\{A\} = 0$ тогда и только тогда, когда $A = \varnothing$. Заметим также, что мера Лебега $\nu\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ абсолютно непрерывна относительно меры μ. Предположим, что существует измеримая (борелевская) функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ такая, что $\nu\{A\} = \int_A f\, d\mu$ для любого $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. При $A = \{x\}, x \in \mathbb{R}$, получаются противоречивые равенства $1 = \nu\{A\} = 0$. Теорема Радона–Никодима не имеет места. Причина этого лежит в том, что мера μ не обладает свойством счетной конечности.

1.9. Функции с ограниченным изменением

Напомним некоторые сведения о функциях с ограниченным изменением (о функциях ограниченной вариации).

1.9.1. Определение. Функция $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, имеет *ограниченное изменение,* если

$$V_a^b(f) = \sup \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| < \infty, \tag{1.9.1}$$

где точная верхняя грань вычисляется по всем возможным разбиениям $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ сегмента $[a, b]$. Величина $V_a^b(f)$ называется *вариацией* функции f на сегменте $[a, b]$.

Из неравенства $|f(x) - f(a)| \leq V_a^b(f)$ для всех $x \in [a, b]$ следует, что функция с ограниченным изменением ограничена.

1.9.2. Теорема. *Если функция $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ имеет ограниченное изменение, то ее сужение $f\colon [c, d] \to \mathbb{R}$ на любой сегмент $[c, d] \subset [a, b]$ имеет ограниченное изменение и для любого $c \in (a, b)$ выполняется равенство*

$$V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f). \tag{1.9.2}$$

► Требуется доказать только равенство (1.9.2). Фиксируем произвольную точку $c \in (a, b)$ и разобьем сегменты $[a, c]$ и $[c, b]$ точками $a = x_0 < \cdots < x_n = c < x_{n+1} < \cdots < x_m = b$. Из неравенства

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| + \sum_{k=n+1}^{m} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq V_a^b(f)$$

следует, что $V_a^c(f) + V_c^b(f) \leq V_a^b(f)$. Так как

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| + \sum_{k=n+1}^{m} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq V_a^c(f) + V_c^b(f),$$

то $V_a^b(f) \leq V_a^c(f) + V_c^b(f)$. Отсюда следует (1.9.2). ◄

Следующая теорема Жордана (Marie Ennemond Camille Jordan) дает описание функций с ограниченным изменением.

1.9.3. Теорема. *Функция $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ имеет ограниченное изменение тогда и только тогда, когда она является разностью $f = f_1 - f_2$ ограниченных возрастающих функций $f_1, f_2\colon [a, b] \to \mathbb{R}$.*

► Если $f = f_1 - f_2$, функции f_1 и f_2 ограничены и возрастают, то $V_a^b(f) \leq V_a^b(f_1) + V_a^b(f_2) < \infty$. Если функция f имеет ограниченное изменение, то функция $v(x) = V_a^x(f), x \in [a, b]$, возрастает и ограничена. Функция $g(x) = V_a^x(f) - f(x), x \in [a, b]$, возрастает. Действительно, если $a \leq x_1 < x_2 \leq b$, то

$$\begin{aligned} g(x_2) - g(x_1) &= (V_a^{x_2}(f) - V_a^{x_1}(f)) - (f(x_2) - f(x_1)) = \\ &= V_{x_1}^{x_2}(f) - (f(x_2) - f(x_1)) \geq 0. \end{aligned}$$

Осталось заметить, что $f = v - g$. ◄

Любая функция $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ с ограниченным изменением имеет предел слева $\lim_{s\uparrow x} f(s) = f(x-)$ в каждой точке $x \in (a,b]$ и предел справа $\lim_{s\downarrow x} f(s) = f(x+)$ в каждой точке $x \in [a,b)$. Свойство непрерывности функции и ее вариации тесно связаны.

1.9.4. Теорема. *Функция $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ с ограниченным изменением непрерывна слева (справа) тогда и только тогда, когда функция $v(x) = V_a^x(x), x \in [a,b]$, непрерывна слева (справа). Более того, справедливы равенства*

$$\begin{aligned} v(x+) - v(x) &= |f(x+) - f(x)| \text{ для } x \in [a,b), \\ v(x) - v(x-) &= |f(x) - f(x-)| \text{ для } x \in (a,b]. \end{aligned} \tag{1.9.3}$$

► Достаточно доказать равенства (1.9.3). Из неравенства

$$|f(x') - f(x)| \le V_x^{x'}(f) = V_a^{x'}(f) - V_a^x(f) = v(x') - v(x)$$

для $x, x' \in [a,b), x < x'$, следует, что $|f(x) - f(x+)| \le v(x+) - v(x)$. Докажем теперь неравенство $v(x+) - v(x) \le |f(x+) - f(x)|$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся точки $x = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ такие, что

$$V_x^b(f) < \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| + \varepsilon.$$

Возьмем произвольное число $x' \in (x, x_1)$. Из равенства (1.9.2) следует, что $v(x+) \le v(x')$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} v(x+) - v(x) \le v(x') - v(x) = V_a^{x'}(f) - V_a^x(f) = V_x^b(f) - V_{x'}^b(f) < \\ < \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| - V_{x'}^b(f) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Сумма $\sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})|$ не превосходит суммы

$$\begin{aligned} |f(x') - f(x)| + |f(x_1) - f(x')| + \sum_{k=2}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| \le \\ \le |f(x') - f(x)| + V_{x'}^b(f), \end{aligned}$$

и, следовательно, $v(x+) - v(x) \le |f(x+) - f(x)| + \varepsilon$. Отсюда следует требуемое неравенство $v(x+) - v(x) \le |f(x+) - f(x)|$. ◄

Арифметические действия с функциями ограниченной вариации приводят к новым функциям ограниченной вариации.

1.9.5. Теорема. *Если функции* $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *имеют ограниченное изменение, то функции* $|f|, fg, \alpha f + \beta g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *для любых* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *имеют ограниченное изменение. Если, кроме того, функция* $1/g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *ограничена, то функции* $1/g, f/g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *имеют ограниченное изменение.*

► Из неравенства $||f(x)| - |f(y)|| \le |f(x) - f(y)|$ для любых $x, y \in [a,b]$ следует, что $V_a^b(|f|) \le V_a^b(f)$. Из неравенства

$$|(\alpha f(x) + \beta g(x)) - (\alpha f(y) + \beta g(y))| \le |\alpha||f(x) - f(y)| + |\beta||g(x) - g(y)|$$

для любых $x, y \in [a,b]$ следует, что $V_a^b(\alpha f + \beta g) \le |\alpha| V_a^b(f) + |\beta| V_a^b(g)$. Аналогично можно доказать, что

$$V_a^b(fg) \le \sup_{a \le x \le b} |g(x)| V_a^b(f) + \sup_{a \le x \le b} |f(x)| V_a^b(g).$$

Если функция $1/g$ ограничена некоторым числом c, то

$$\Big| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(y)} \Big| \le c^2 |g(x) - g(y)| \text{ для любых } x, y \in [a,b].$$

Отсюда следует, что $V_a^b(1/g) \le c^2 V_a^b$ и $V_a^b(f/g) < \infty$. ◄

Пусть дана непрерывная справа функция $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ с конечной вариацией такая, что $f(a) = 0$. Ее можно представить в виде разности $f = v - g$ непрерывных справа возрастающих функций $v(x) = V_a^x(f)$ и $g(x) = V_a^x(f) - f(x), x \in [a,b]$. Заметим, что $g(a) = v(a) = 0$. Продолжим функции v и g на всю вещественную прямую $\mathbb{R}$, положив $v(x) = g(x) = 0$ для $x < a$ и $v(x) = v(b)$ и $g(x) = g(b)$ для $x > b$. По функциям v и g, продолженным на $\mathbb{R}$, можно построить меры Лебега–Стилтьеса $\mu_v, \mu_g\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$, как указано в теореме 1.4.26. Функция $\mu_f = \mu_v - \mu_g\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ является конечным зарядом. Она называется *зарядом Лебега–Стилтьеса,* построенным по функции f.

1.9.6. Теорема. (i) *Для любого* $E \in \mathcal{B}([a,b])$ *выполняются неравенства* $|\mu_f\{E\}| \le \mu_v\{E\}, \mu_g\{E\} \le 2\mu_v\{E\}$.
(ii) *Если функция* $\phi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *интегрируема по мере* μ_v, *то она интегрируема по мере* μ_g *и по заряду* μ_f *и удовлетворяет условию*

$$\Big| \int_{[a,b]} \phi \, d\mu_f \Big| \le \int_{[a,b]} |\phi| \, d\mu_v. \tag{1.9.4}$$

► (i). Заметим, что $\mu_f\{\{a\}\} = \mu_g\{\{a\}\} = \mu_v\{\{a\}\} = 0$ и для любого множества вида $(\alpha, \beta] \subseteq [a, b]$ выполняются неравенства

$$|\mu_f\{(\alpha, \beta]\}| = |f(\beta) - f(\alpha)| \leq v(\alpha) - v(\alpha) = \mu_v\{(\alpha, \beta]\},$$
$$\mu_g\{(\alpha, \beta]\} = (v(\beta) - v(\alpha)) - (f(\beta) - f(\alpha)) \leq 2\mu_v\{(\alpha, \beta]\}.$$

Обозначим $\mathcal{A}$ класс множеств E, которые можно представить в виде объединения некоторого конечного числа попарно непересекающихся множеств вида $\{a\}$ и $(\alpha, \beta] \subset [a, b]$. Нетрудно видеть, что $\mathcal{A}$ является алгеброй. Для любого $E = \{a\} \cup \cup_{k=1}^n (\alpha_k, \beta_k] \in \mathcal{A}$ выполняются неравенства $|\mu_f\{E\}| \leq \mu_v\{E\}$ и $\mu_g\{E\} \leq 2\mu_v\{E\}$.

Обозначим $\mathcal{L}$ класс множеств $E \in \mathcal{B}([a, b])$, для которых выполняются неравенства $|\mu_f\{E\}| \leq \mu_v\{E\}$ и $\mu_g\{E\} \leq 2\mu_v\{E\}$. Нетрудно проверить, что $\mathcal{L}$ является монотонным классом. По доказанному выше $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}$. По теореме 1.2.7 выполняется равенство $\mathcal{L} = \mathcal{B}([a, b])$.

(ii). Интеграл функции ϕ по заряду μ_f равен разности интегралов функции ϕ по мерам μ_v и μ_g. Поэтому достаточно доказать, что функция ϕ интегрируема по мере μ_g, если она интегрируема по мере μ_v. Предположим, что простая функция $\phi = a_1 \mathbb{1}_{A_1} + \cdots + a_n \mathbb{1}_{A_m}$ с $a_k \in \mathbb{R}, A_k \in \mathcal{B}([a, b]), k = 1, \ldots, m$, интегрируема по мере μ_v. В силу (i) выполняются неравенства

$$\int_{[a,b]} |\phi|\, d\mu_g = \sum_{k=1}^m |a_k| \mu_g\{A_k\} \leq 2 \sum_{k=1}^m |a_k| \mu_v\{A_k\} = 2 \int_{[a,b]} |\phi|\, d\mu_v,$$
$$\Big| \int_{[a,b]} \phi\, d\mu_f \Big| = \Big| \sum_{k=1}^m a_k \mu_f\{A_k\} \Big| \leq \sum_{k=1}^m |a_k| \mu_v\{A_k\} = \int_{[a,b]} |\phi|\, d\mu_v.$$

Если функция $\psi \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по мере μ_v, то

$$\int_{[a,b]} |\psi|\, d\mu_g = \sup \int_{[a,b]} |\phi|\, d\mu_g \leq 2 \sup \int_{[a,b]} |\phi|\, d\mu_v = 2 \int_{[a,b]} |\psi|\, d\mu_v.$$

Точная верхняя грань вычисляется по всем простым функциям $|\phi| \leq |\psi|$. Тем самым доказано, что функция ψ интегрируема по мере μ_g и по заряду μ_f. Попутно также доказано неравенство (1.9.4) для простых функций. Пусть дана любая интегрируемая по мере μ_v борелевская функция ϕ. В силу теоремы 1.5.9, следствия 1.5.10 и теоремы 1.6.18 существует последовательность $\{\phi_n\}_{n \geq 1}$ простых функций такая, что

$$\Big|\int_{[a,b]}\phi\,d\mu_f\Big| \leftarrow \Big|\int_{[a,b]}\phi_n\,d\mu_f\Big| \le \int_{[a,b]}|\phi_n|\,d\mu_v \to \int_{[a,b]}|\phi|\,d\mu_v.$$

Тем самым неравенство (1.9.4) доказано. ◄

1.10. Выпуклые функции

Из большого числа сведений о выпуклых функциях нам понадобится теорема Штольца, доказанная им в далеком 1893 году.

1.10.1. Определение. Функция $f\colon T \to \mathbb{R}$, определенная на выпуклом множестве T, называется *выпуклой,* если

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \le \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

для любых $x, y \in T, \alpha \in [0,1]$.

В следующей теореме, принадлежащей Штольцу (Otto Stolz), указаны некоторые свойства выпуклых функций.

1.10.2. Теорема. *Пусть дана выпуклая функция* $f\colon T \to \mathbb{R}$. (i) *Для любых* $x, y, a \in T, t_* < a < t^*, x < y$, *справедливо неравенство*

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \le \frac{f(y)-f(a)}{y-a}. \tag{1.10.1}$$

(ii) *Существуют производные* $f'_-, f'_+\colon (t_*, t^*) \to \mathbb{R}$, *левая производная* f'_- *непрерывна слева, правая производная* f'_+ *непрерывна справа, для любых* $a, b \in (t_*, t^*), a < b$, *справедливы неравенства*

$$-\infty < f'_-(a) \le f'_+(a) \le f'_-(b) \le f'_+(b) < \infty.$$

► (i). Пусть $x, y, a \in T$. Возможны следующие расположения указанных чисел: $x < y < a < t^*; x < a < y; t_* < a < x < y$. Если, например, $x < y < a < t^*$, то $y = (a-y)x/(a-x) + (y-x)a/(a-x)$ и

$$f(y) \le \frac{a-y}{a-x} f(x) + \frac{y-x}{a-x} f(a), f(a) = \frac{a-y}{a-x} f(a) + \frac{y-x}{a-x} f(a).$$

Отсюда следует неравенство

$$f(y) - f(a) \le \frac{a-y}{a-x}(f(x) - f(a)),$$

из которого следует (1.10.1). С помощью аналогичных рассуждений можно доказать неравенство (1.10.1), если $t_* < a < x < y$. Небольшое отличие имеет доказательство неравенства (1.10.1) для случая $x < a < y$. В этом случае следует воспользоваться равенством $a = (y-a)x/(y-x) + (a-x)y/(y-x)$ и неравенством

$$\frac{y-a}{y-x}f(a) + \frac{a-x}{y-x}f(a) = f(a) \le \frac{y-a}{y-x}f(x) + \frac{a-x}{y-x}f(y).$$

Отсюда следует, что

$$\frac{y-a}{y-x}(f(a) - f(x)) \le \frac{a-x}{y-x}(f(y) - f(a)).$$

Это неравенство равносильно неравенству (1.10.1).

(ii). В силу условия (1.10.1) для любых точек $s, x, a, y, u \in T$, $s < x < a < y < u$, выполняются неравенства

$$\frac{f(s)-f(a)}{s-a} \le \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \le \frac{f(y)-f(a)}{y-a} \le \frac{f(u)-f(a)}{u-a}.$$

Заметим, что дроби слева и справа конечны. Полагая $x \uparrow a$ и $y \downarrow a$ при фиксированных s и u, мы получим $-\infty < f'_-(a) \le f'_+(a) < \infty$.

В силу (1.10.1) для $t_* < a < x < y < b < t^*$ выполняются неравенства

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \le \frac{f(y)-f(a)}{y-a} \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Обозначим $\alpha = (f(y)-f(a))/(y-a)$ и $\beta = (f(b)-f(a))/(b-a)$. Так как $\alpha \le \beta$, то

$$f(y)-f(b) = (f(y)-f(a))-(f(b)-f(a)) = \alpha(y-a)-\beta(b-a) \le \alpha(y-b).$$

Отсюда следует, что

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \le \frac{f(y)-f(a)}{y-a} = \alpha \le \frac{f(y)-f(b)}{y-b}.$$

Требуемое неравенство $f'_+(a) \le f'_-(b)$ получается с помощью предельного перехода при $x \downarrow a$ и $y \uparrow b$.

Осталось доказать непрерывность слева функции f'_- и непрерывность справа функции f'_+. Докажем, например, что левая производная $f'_- : (t_*, t^*) \to \mathbb{R}$ непрерывна слева. Функция f'_- не убывает. Поэтому существует предел $\lim_{x\uparrow a} f'_-(x) = f'_-(a-) \le f'_-(a)$ для любого $a \in (t_*, t^*)$. Требуется доказать равенство $f'_-(a-) = f'_-(a)$. Достаточно доказать неравенство $f'_-(a-) \geq f'_-(a)$. В силу (i) выполняется соотношение

$$\frac{f(x) - f(u)}{x - u} \uparrow f'_-(u) \text{ при } x \uparrow u < a$$

и, следовательно, $f'_-(u) \geq \frac{f(x)-f(u)}{x-u}$ для $t_* < x < u < a$. Функция $f\colon (t_*, t^*) \to \mathbb{R}$ непрерывна, так как она имеет конечные односторонние производные. Отсюда следует, что

$$f'_-(a-) = \lim_{u \uparrow a} f'_-(u) \geq \lim_{u \uparrow a} \frac{f(x) - f(u)}{x - u} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

для любого $x, t_* < x < a$. Отсюда, в свою очередь, следует, что

$$f'_-(a-) \geq \lim_{x \uparrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_-(a).$$

Тем самым доказано, что функция f'_- непрерывна слева. ◄

1.10.3. Теорема. *Для любой выпуклой функции* $f\colon T \to \mathbb{R}$ *существуют вещественные числа* $a_n, b_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, *такие, что* $f(x) = \sup_{n \geq 1}(a_n x + b_n)$ *для любого* $x \in (t_*, t^*)$.

► По теореме 1.10.2 для любого $a \in (t_*, t^*)$ верны соотношения

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \downarrow f'_+(a) \text{ при } x \downarrow a, \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \uparrow f'_-(a) \text{ при } x \uparrow a.$$

Отсюда следует неравенство

$$f(x) \geq f(a) + \lambda(a)(x - a) \text{ для любых } a, x \in (t_*, t^*), \qquad (1.10.2)$$

где $\lambda(a) = (f'_+(a) + f'_-(a))/2$. Запишем все рациональные числа из интервала (t_*, t^*) в виде последовательности $\{r_n\}_{n \geq 1}$ и обозначим $a_n = \lambda(r_n)$ и $b_n = f(r_n) - \lambda(r_n) r_n$. В силу (1.10.2) выполняется неравенство $f(x) \geq \sup_{n \geq 1}(a_n x + b_n)$. Пусть $x \in (t_*, t^*)$. Найдется последовательность $\{r_{k_n}\}_{n \geq 1}$ рациональных чисел, которая сходится к x. Поэтому найдутся числа $n_0 \in \mathbb{N}$ и $\alpha, \beta \in T, \alpha < \beta$, такие, что $\alpha < x, r_{k_n} < \beta$ для всех $n \geq n_0$. По теореме 1.10.2 выполняются неравенства $f'_-(\alpha) \leq \lambda(r_{k_n}) \leq f'_+(\beta)$. Отсюда, в частности, следует, что числа $\lambda(r_{k_n})$ ограничены в совокупности. Отсюда следует, что $a_{k_n} x + b_{k_n} = f(r_{k_n}) + \lambda(r_{k_n})(x - r_{k_n}) \to f(x)$ при $n \to \infty$, и, следовательно, $f(x) \leq \sup_{n \geq 1}(a_n x + b_n)$. ◄

Глава 2
Вероятность

Теория вероятностей является той естественной базой, на которой построена современная теория случайных процессов. В этой главе собраны необходимые сведения по теории вероятностей.

2.1. Независимость

Напомним терминологию и некоторые сведения, связанные с понятием независимости.

2.1.1. Определение. Пространство с мерой $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ называется *вероятностным пространством,* если $\mathbb{P}\{\Omega\} = 1$. Мера $\mathbb{P}$ называется *вероятностной* мерой или *вероятностью.*

Точки множества Ω называются *элементарными событиями.* Само множество Ω называется *пространством элементарных событий.* Множества из $\mathcal{F}$ называются *событиями.* Непересекающиеся множества из $\mathcal{F}$ называются *несовместными* событиями. Пустое множество называется *невозможным* событием. Далее предполагается, что все события и функции, о которых пойдет речь, определены на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

2.1.2. Определение. События $A_k \in \mathcal{F}, k = 1, \ldots, n, n \geq 2$, называются *независимыми,* если

$$\mathbb{P}\{\cap_{j=1}^{r} A_{k_j}\} = \prod_{j=1}^{r} \mathbb{P}\{A_{k_j}\} \tag{2.1.1}$$

для любых $1 \leq k_1 < \cdots < k_r \leq n$. События $A_t, t \in T$, в бесконечном числе, называются *независимыми,* если для любого $n \in \mathbb{N}$ и для любых различных $t_1, \ldots, t_n \in T$ события $A_{t_1}, \ldots, A_{t_n}$ независимы.

Понятие независимости событий зависит от вероятности. Обычно упоминание о этой зависимости опускается.

Любое событие A порождает σ-алгебру $\sigma(A) = \{\Omega, \varnothing, A, A^c\}$. Нетрудно видеть, что события $A_1, \ldots, A_n$ независимы тогда и только тогда, когда выполняется равенство $\mathbb{P}\{\cap_{k=1}^n C_k\} = \mathbb{P}\{C_1\}\cdots\mathbb{P}\{C_n\}$ для любых представителей $C_1 \in \sigma(A_1), \dots, C_n \in \sigma(A_n)$.

2.1.3. Определение. Сигма-алгебры $\mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{F}, k = 1, \dots, n$, где $n \geq 2$, называются *независимыми,* если для любых представителей $A_1 \in \mathcal{F}_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}_n$ выполняется равенство

$$\mathbb{P}\{\cap_{k=1}^n A_k\} = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}\{A_k\}. \tag{2.1.2}$$

Сигма-алгебры $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}, t \in T$, в бесконечном числе называются *независимыми,* если для любого $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, и для любых различных $t_1, \dots, t_n \in T$ сигма-алгебры $\mathcal{F}_{t_1}, \dots, \mathcal{F}_{t_n}$ независимы.

2.1.4. Определение. Событие $A \in \mathcal{F}$ и сигма-алгебра $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ называются *независимыми,* если A и любое $B \in \mathcal{G}$ независимы.

Это определение можно пересказать иначе. Событие A и сигма-алгебра $\mathcal{G}$ независимы, если сигма-алгебры $\sigma(A)$ и $\mathcal{G}$ независимы.

В ряде случаев проверку независимости нескольких σ-алгебр можно упростить с помощью следующей теоремы.

2.1.5. Теорема. *Предположим, что для каждого* $k = 1, \dots, n$, $n \geq 2$, *сигма-алгебра* $\mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{F}$ *порождена некоторым* π-*классом* $\mathcal{E}_k$, *содержащим* Ω. *Тогда сигма-алгебры* $\mathcal{F}_k, k = 1, \dots, n$, *независимы, если и только если выполняется равенство* (2.1.2) *для любых представителей* $A_1 \in \mathcal{E}_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}_n$.

► Требуется доказать только достаточность условий, а именно, что равенство (2.1.2) выполняется для любых представителей $A_k \in \mathcal{F}_k$, $k = 1, \dots, n$, если оно выполняется для любых представителей π-классов $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$. Для любых фиксированных событий $A_1 \in \mathcal{E}_1, \dots, A_{n-1} \in \mathcal{E}_{n-1}$ символ $\mathcal{L}_n = \mathcal{L}_n(A_1, \dots, A_{n-1})$ обозначает класс множеств $B \in \mathcal{F}_n$, для которых выполняется равенство $\mathbb{P}\{\cap_{k=1}^{n-1} A_k \cap B\} = \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}\{A_k\}\mathbb{P}\{B\}$. Класс $\mathcal{L}_n$ содержит π-класс $\mathcal{E}_n$. Нетрудно проверить, что $\mathcal{L}_n$ является λ-классом. По теореме 1.2.7 выполняется равенство $\mathcal{L}_n = \mathcal{F}_n$. Это означает, что равенство (2.1.2) выполняется для любых $A_1 \in \mathcal{E}_1, \dots, A_{n-1} \in \mathcal{E}_{n-1}, A_n \in \mathcal{F}_n$. Возьмем теперь произвольные события $A_1 \in \mathcal{E}_1, \dots, A_{n-2} \in \mathcal{E}_{n-2}, A_n \in \mathcal{F}_n$ и обозначим класс $\mathcal{L}_{n-1} = \mathcal{L}_{n-1}(A_1, \dots, A_{n-2}, A_n)$ событий $B \in \mathcal{F}_{n-1}$, для которых выполняется равенство

$$\mathbb{P}\{\cap_{k=1}^{n-2} A_k \cap B \cap A_n\} = \prod_{k=1}^{n-2} \mathbb{P}\{A_k\}\mathbb{P}\{B\}\mathbb{P}\{A_n\}.$$

Нетрудно убедиться, что класс $\mathcal{L}_{n-1}$ содержит π-класс $\mathcal{E}_{n-1}$ и является λ-классом. По теореме 1.2.7 должно выполняется равенство $\mathcal{L}_{n-1} = \mathcal{F}_{n-1}$. Это означает, что равенство (2.1.2) выполняется для любых событий $A_1 \in \mathcal{E}_1, \ldots, A_{n-2} \in \mathcal{E}_{n-2}, A_{n-1} \in \mathcal{F}_{n-1}, A_n \in \mathcal{F}_n$. Далее можно рассуждать по индукции и доказать равенство (2.1.2) для любых представителей $A_1 \in \mathcal{F}_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}_n$. ◀

2.1.6. Определение. Любая измеримая векторная функция $X = (X_1, \ldots, X_d)\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$ называется *случайным вектором.* Одномерный случайный вектор называется *случайной величиной.*

Читатель заметил, что измеримые функции (случайные величины) теперь обозначаются прописными латинскими буквами. Это является данью традиции, принятой в теории вероятностей.

Измеримые функции $X\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ и $Y\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}^d$ также называются *расширенной* случайной величиной и *расширенным* случайным вектором. Обычно отдают предпочтение термину *измеримые функции,* как более короткому.

По теореме 1.2.10 класс $\sigma(X) = \{X^{-1}(A)\colon A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^d)\}$ прообразов борелевских множеств является σ-алгеброй или, более подробно, σ-алгеброй, порожденной измеримой функцией $X\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}^d$. По аналогии с $\sigma(X)$ можно определить сигма-алгебру $\sigma(X_t, t \in T)$, порожденную семейством $\{X_t, t \in T\}$ функций $X_t\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}^{d_t}$. По определению она порождается классом прообразов $X_t^{-1}(A), t \in T, A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^{d_t})$. Нетрудно видеть, что $\sigma(X_t, t \in T)$ является минимальной сигма-алгеброй, относительно которой измеримы все функции $X_t, t \in T$.

2.1.7. Определение. Семейства $\{X_t, t \in T\}$ и $\{Y_t, t \in T'\}$ (расширенных) случайных векторов называются *независимыми,* если σ-алгебры $\sigma(X_t, t \in T)$ и $\sigma(Y_t, t \in T')$ независимы. В частности, (расширенные) случайные векторы $X_t, t \in T$, называются *независимыми,* если сигма-алгебры $\sigma(X_t), t \in T$, независимы.

2.1.8. Определение. Семейство $\{X_t, t \in T\}$ (расширенных) случайных векторов и σ-алгебра $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, называются *независимыми,* если сигма-алгебры $\sigma(X_t, t \in T)$ и $\mathcal{G}$ независимы.

Интеграл по вероятности (расширенной) случайной величины X называется ее *математическим ожиданием* и обозначается $\mathbb{E}X$. К неравенствам из параграфа 1.6 первой главы следует добавить неравенство Иенсена (Johan Ludwig Jensen).

2.1.9. Теорема. *Пусть даны выпуклая функция* $g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ *и случайная величина* $X\colon \Omega \to (a,b)$. *Если* $\mathbb{E}|X| < \infty$, *то* $a < \mathbb{E}X < b$,

$\mathbb{E}g^-(X) < \infty$ *и выполняется неравенство Иенсена*

$$g(\mathbb{E}X) \le \mathbb{E}g(X). \tag{2.1.3}$$

► Напомним, что g^- обозначает отрицательную часть функции $g(x), x \in (a,b)$. Если $b < \infty$, то $b - X > 0$ и $\mathbb{E}(b - X) \ge 0$. Если $\mathbb{E}X = b$, то, в силу теоремы 1.6.7, выполняется невозможное равенство $X = b$ п.в. Поэтому выполняется неравенство $\mathbb{E}X < b$. Оно выполняется также для $b = \infty$. Аналогично можно доказать неравенство $a < \mathbb{E}X$.

По теореме 1.10.3 существуют две последовательности $\{a_n\}_{n\ge1}$ и $\{b_n\}_{n\ge1}$ вещественных чисел такие, что для любого $x \in (a,b)$ выполняется равенство $g(x) = \sup_{n\ge1}(a_n x + b_n)$ и, следовательно, $g(x) \ge a_n x + b_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Отсюда, при $x = X$, следует, что $b_n + a_n\mathbb{E}X \le \mathbb{E}g(X)$ и, следовательно, математическое ожидание $\mathbb{E}g(X)$ существует. Отсюда, в силу теоремы 1.10.3, следует требуемое неравенство $g(\mathbb{E}X) = \sup_{n\ge1}(a_n\mathbb{E}X + b_n) \le \mathbb{E}g(X)$. Так как величина $g(\mathbb{E}X)$ конечна, то $\mathbb{E}g^-(X) < \infty$. ◄

2.1.10. Теорема. *Пусть даны независимые* (*расширенные*) *случайные величины* X, Y. (i) *Если* $\mathbb{E}|X|, \mathbb{E}|Y| < \infty$, *то* $\mathbb{E}|XY| < \infty$ *и выполняется равенство* $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$. (ii) *Если* $\mathbb{E}(|XY|) < \infty$ *и* $\mathbb{P}\{|XY| > 0\} > 0$, *то* $\mathbb{E}|X| < \infty$ *и* $\mathbb{E}|Y| < \infty$.

► (i). Утверждение достаточно доказать для неотрицательных случайных величин X и Y. Предположим сначала, что они простые $X = \sum_{k=1}^n c_k \mathbb{1}_{A_k}$ и $Y = \sum_{r=1}^m d_r \mathbb{1}_{B_r}$. Напомним, что каждый из наборов событий $A_1, \ldots, A_n$ и $B_1, \ldots, B_m$ является разбиением события Ω. Так как случайные величины X и Y независимы, то

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^m c_k d_r \mathbb{P}\{A_k\}\mathbb{P}\{B_r\} = \mathbb{E}X\mathbb{E}Y. \tag{2.1.4}$$

Далее, для любых независимых случайных величин X и Y можно построить возрастающие последовательности $\{X_n\}_{n\ge1}$ и $\{Y_n\}_{n\ge1}$ простых неотрицательных случайных величин, как указано в теореме 1.5.9. Эти последовательности поточечно сходятся к X и Y. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ случайные величины X_n и Y_n независимы, так как они являются борелевскими функциями независимых случайных величин X и Y. С помощью теоремы о монотонной сходимости (теорема 1.6.3) можно убедиться, что

$$\mathbb{E}(XY) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n Y_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n\mathbb{E}Y_n = \mathbb{E}X\mathbb{E}Y.$$

(ii). Снова можно считать, что случайные величны X и Y неотрицательны. Для простых случайных величин справедливы равенства (2.1.4). В силу условия $\mathbb{P}\{XY > 0\} > 0$ математические ожидания $\mathbb{E}X$ и $\mathbb{E}Y$ строго положительны. Далее, из неравенств $0 < \mathbb{E}X_n\mathbb{E}Y_n = \mathbb{E}(X_nY_n) \le \mathbb{E}(XY)$ следуют неравенства $0 < \mathbb{E}X\mathbb{E}Y \le \mathbb{E}(XY)$. Отсюда следует, что $\mathbb{E}X < \infty$ и $\mathbb{E}Y < \infty$. В силу (i) выполняется равенство $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$. ◀

С любой случайной величиной $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ связана функция множеств $\mathbb{P}_X\{A\} = \mathbb{P}\{X \in A\}, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, называемая *распределением* случайной величины X. Если в качестве A брать только полупрямые $(-\infty, x]$, то будет определена функция $F_X(x) = \mathbb{P}\{X \le x\}, x \in \mathbb{R}$, называемая *функцией распределения* случайной величины X. Нетрудно убедиться, что распределение и функция распределения случайной величины X взаимно однозначно определяют друг друга.

Аналогичные характеристики можно определить для произвольного случайного вектора $X = (X_1, \dots, X_d)\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$. Функция $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}\{X \in A\}, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, множеств называется *распределением* случайного вектора X. Она также называется *совместным распределением* случайных величин $X_1, \dots, X_d$. Если в качестве A брать множества вида $A = \times_{k=1}^{d}(-\infty, x_k]$, то будет определена функция $F_X(x_1, \dots, x_d) = \mathbb{P}\{X_1 \le x_1, \dots, X_d \le x_d\}, x_1, \dots, x_d \in \mathbb{R}$, называемая *функцией распределения* случайного вектора X. Она также называется совместной функцией распределения случайных величин $X_1, \dots, X_d$. Несложно убедиться, что распределение и функция распределения случайного вектора X взаимно однозначно определяют друг друга.

Для любой случайной величины $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ можно определить ее *характеристическую функцию* $f_X(t) = \mathbb{E}e^{itX}, t \in \mathbb{R}$. *Характеристическая функция* $f_X(t) = \mathbb{E}e^{i\langle t, X\rangle}, t \in \mathbb{R}^d$, существует для любого случайного вектора $X = (X_1, \dots, X_d)$. Здесь использовано обозначение $\langle t, X\rangle = \sum_{k=1}^{d} t_kX_k$ для любого вектора $t = (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^d$. По теореме 1.6.12 выполняется равенство

$$f_X(t) = \int_\Omega e^{i\langle t, X(\omega)\rangle}\, \mathbb{P}\{d\omega\} = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t, x\rangle}\, \mathbb{P}_X\{dx\} \qquad (2.1.5)$$

для любого $t \in \mathbb{R}^d$. Символ $\langle t, x\rangle = \sum_{k=1}^{d} t_kx_k$ обозначает скалярное произведение векторов $t, x \in \mathbb{R}^d$. Характеристическая функция случайного вектора однозначно определяется по распределению (по функции распределения) случайного вектора. В следующей теореме доказано, что справедливо обратное утверждение.

2.1.11. Теорема. *Распределение и характеристическая функция случайного вектора взаимно однозначно определяют друг друга.*

► Характеристическая функция случайного вектора вычисляется по определенному правилу. Поэтому требуется доказать, что распределение случайного вектора X однозначно определяется его характеристической функцией. Условимся обозначать $(a, b]$ параллелепипед $\{x \in \mathbb{R}^d \colon a_1 < x_1 \leq b_1, \ldots, a_d < x_d \leq b_d\}$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$, определяемый векторами $a = (a_1, \ldots, a_d)$ и $b = (b_1, \ldots, b_d)$, координаты которых удовлетворяют условию $a_k < b_k$ для всех $k = 1, \ldots, d$. По аналогии можно построить замкнутый параллелепипед $[a, b]$ и открытый параллелепипед (a, b). Разность $\partial((a, b]) = (a, b] \setminus (a, b)$ называется границей исходного параллелепипеда $(a, b]$. Следующее утверждение (равенство (2.1.6)) называется *формулой обращения.*

Если выполняется условие $\mathbb{P}_X\{\partial(a, b]\} = 0$, то

$$\mathbb{P}_X\{(a, b]\} = \lim_{c\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{-c}^{c} \prod_{k=1}^{d} \frac{e^{-it_k a_k} - e^{-it_k b_k}}{it_k} f_X(t)\, dt, \qquad (2.1.6)$$

где приняты сокращения $\int_{-c}^{c}\{\cdots\}\, dt$ для d-мерного интеграла, для вектора $t = (t_1, \ldots, t_d)$, для диференциала $dt = dt_1 \cdots dt_d$.

Подставим функцию (2.1.5) в интеграл под знаком предела и воспользуемся теоремой Фубини. В результате получится, что

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{-c}^{c} \prod_{k=1}^{d} \frac{e^{-it_k a_k} - e^{-it_k b_k}}{it_k} f_X(t)\, dt = \\
&\qquad = \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{k=1}^{d} \int_{-c}^{c} \frac{e^{it_k(x_k - a_k)} - e^{it_k(x_k - b_k)}}{2it_k\pi}\, dt_k\, \mathbb{P}_X\{dx\} = \\
&\qquad = \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{k=1}^{d} \int_{0}^{c} \frac{\sin(t_k(x_k - a_k)) - \sin(t_k(x_k - b_k))}{t_k\pi}\, dt_k\, \mathbb{P}_X\{dx\}.
\end{aligned}$$

Функция под знаком внешнего интеграла ограничена. Поэтому применима теорема об ограниченной сходимости, по которой

$$\lim_{c\to\infty}\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{-c}^{c}\prod_{k=1}^{d}\frac{e^{-it_ka_k}-e^{-it_kb_k}}{it_k}f_X(t)\,dt=$$
$$=\int_{\mathbb{R}^d}\prod_{k=1}^{d}\int_0^\infty\frac{\sin(t_k(x_k-a_k))-\sin(t_k(x_k-b_k))}{t_k\pi}\,dt_k\,\mathbb{P}_X\{dx\}.$$

Можно доказать, что внутренний несобственный интеграл равен $\mathbb{1}_{(a_k,b_k)}(x_k), x_k\in\mathbb{R}$. Такие интегралы специально исследовал Фруллани (Giuliano Frullani) и указал правила их вычисления. Этот интеграл в качестве примера вычисляется в большинстве курсов по математическому анализу. В результате получается, что

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{-c}^{c}\prod_{k=1}^{d}\frac{e^{-it_ka_k}-e^{-it_kb_k}}{it_k}f_X(t)\,dt\to\int_{\mathbb{R}^d}\prod_{k=1}^{d}\mathbb{1}_{(a_k,b_k)}(x_k)\,\mathbb{P}_X\{dx\}$$

при $c\to\infty$. Тем самым доказана формула (2.1.6). Из свойств непрерывности меры сверху и снизу следует, что мера $\mathbb{P}_X$ однозначно определяется своим преобразованием Фурье на всех множествах вида $(a,b]$. Класс таких множеств образует π-класс, который порождает борелевскую сигма-алгебру на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$. По теореме 1.4.6 мера $\mathbb{P}_X$ однозначно определяется своими значениями на множествах вида $(a,b]\subseteq\mathbb{R}^d$. ◀

Пусть даны независимые случайные векторы $X=(X_1,\dots,X_n)$ и $Y=(Y_1,\dots,Y_m)$. По теореме 2.1.10 выполняется равенство

$$\mathbb{E}e^{i\langle t,X\rangle+i\langle u,Y\rangle}=\mathbb{E}e^{i\langle t,X\rangle}\mathbb{E}e^{i\langle u,Y\rangle} \tag{2.1.7}$$

для любых $t=(t_1,\dots,t_n)\in\mathbb{R}^n$ и $u=(u_1,\dots,u_m)\in\mathbb{R}^m$.

Ниже будет доказано, что это равенство является необходимым условием независимости случайных векторов X и Y.

2.1.12. Теорема. *Случайные векторы* $X\colon\Omega\to\mathbb{R}^n, Y\colon\Omega\to\mathbb{R}^m$ *независимы тогда и только тогда, когда для любых* $t\in\mathbb{R}^n, u\in\mathbb{R}^m$ *выполняется равенство* (2.1.7).

▶ Требуется только доказать, что равенство (2.1.7) влечет независимость случайных векторов X и Y. Возьмем

$$a=(a_1,\dots,a_n), b=(b_1,\dots,b_n)\in\mathbb{R}^n, a_k<b_k, k=1,\dots,n,$$
$$c=(c_1,\dots,c_m), d=(d_1,\dots,d_m)\in\mathbb{R}^m, c_r<d_r, r=1,\dots,m,$$

такие, что $\mathbb{P}\{X \in \partial((a,b])\} = 0$ и $\mathbb{P}\{Y \in \partial((c,d])\} = 0$. Обозначим

$$g_X(t) = \prod_{k=1}^{n} \frac{e^{-it_k a_k} - e^{-it_k b_k}}{i2t_k \pi}, g_Y(u) = \prod_{r=1}^{m} \frac{e^{-iu_r c_r} - e^{-iu_r d_r}}{i2u_r \pi}.$$

С помощью формулы (2.1.6) можно убедиться, что

$$\mathbb{P}\{X \in (a,b], Y \in (c,d]\} = \lim_{c\to\infty} \int_{-c}^{c} g_X(t) g_Y(u)\, dtdu =$$
$$= \lim_{c\to\infty} \int_{-c}^{c} g_X(t)\, dt \int_{-c}^{c} g_Y(u)\, du = \mathbb{P}\{X \in (a,b]\}\mathbb{P}\{Y \in (c,d]\}.$$

Напомним, что $\int_{-c}^{c}\{\cdots\}\, dtdu$ обозначает $(n+m)$-мерный интеграл. Аналогичные сокращенные обозначения использовались для интегралов по переменным $u \in \mathbb{R}^m$ и $t \in \mathbb{R}^n$.

Из свойств непрерывности вероятности снизу и сверху следует, что $\mathbb{P}\{X \in (a,b], Y \in (c,d]\} = \mathbb{P}\{X \in (a,b]\}\mathbb{P}\{Y \in (c,d]\}$ для любых параллелепипедов $(a,b] \subset \mathbb{R}^n$ и $(c,d] \subset \mathbb{R}^m$. Далее можно воспользоваться рассуждениями из теоремы 2.1.5. Фиксируем $(a,b] \subset \mathbb{R}^n$ и обозначим $\mathcal{L}((a,b])$ класс множеств $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, для которых выполняется равенство $\mathbb{P}\{X \in (a,b], Y \in B\} = \mathbb{P}\{X \in (a,b]\}\mathbb{P}\{Y \in B\}$. Несложно убедиться, что класс $\mathcal{L}((a,b])$ является σ-алгеброй. Класс $\mathcal{L}((a,b])$ содержит все параллелепипеды $(c,d] \subset \mathbb{R}^m$. Такие параллелепипеды порождают σ-алгебру $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, и, следовательно, выполняется равенство $\mathcal{L}((a,b]) = \mathbb{B}(\mathbb{R}^m)$. Это означает, что равенство $\mathbb{P}\{X \in (a,b], Y \in B\} = \mathbb{P}\{X \in (a,b]\}\mathbb{P}\{Y \in B\}$ выполняется для любого $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$. Далее фиксируем $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ и обозначим $\mathcal{M}(B)$ класс множеств $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, для которых выполняется равенство $\mathbb{P}\{X \in A, Y \in B\} = \mathbb{P}\{X \in A\}\mathbb{P}\{Y \in B\}$. Снова можно убедиться, что класс $\mathcal{M}(B)$ совпадает с сигма-алгеброй $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Это означает, что равенство $\mathbb{P}\{X \in A, Y \in B\} = \mathbb{P}\{X \in A\}\mathbb{P}\{Y \in B\}$ выполняется для любых $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ и $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$. ◄

2.1.13. Определение. Говорят, что случайная величина $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ имеет *плотность вероятностей* $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, если

$$\mathbb{P}_X\{A\} = \int_A p(x)\, dx, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}). \tag{2.1.8}$$

2.1.14. Теорема. *Пусть дана случайная величина X с плотностью вероятностей p. Если характеристическая функция f_X слу-*

чайной величины X интегрируема по мере Лебега, то

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f_X(t)\, dt \text{ п.в.} \tag{2.1.9}$$

по отношению к мере Лебега.

▶ По формуле (2.1.6) выполняется равенство

$$\frac{F_X(b) - F_X(a)}{b-a} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it(b-a)} f_X(t)\, dt \tag{2.1.10}$$

для всех $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, таких, что $\mathbb{P}\{X = a\} = \mathbb{P}\{X = b\} = 0$. Устремим b к a, считая a фиксированным числом. По теореме об ограниченной сходимости можно перейти к пределу под знаком интеграла. В результате получится равенство

$$F_X'(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ita} f_X(t)\, dt.$$

Отсюда следует важное заключение, что функция распределения F_X случайной величины X непрерывна и, следовательно, формула (2.1.10) справедлива для любых $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. По предположению для любых $a, b \in \mathbb{R}$, выполняется равенство

$$\frac{F_X(b) - F_X(a)}{b-a} = \frac{1}{b-a} \int_a^b p(x)\, dx,$$

из которого, в силу (2.1.10), следует (2.1.9) с заменой x на a. ◀

2.1.15. Теорема. *Пусть даны независимые случайные величины X и Y с плотностями вероятностей p_X и p_Y. Тогда случайная величина $X + Y$ имеет плотность вероятностей*

$$p_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x-u) p_Y(u)\, du, x \in \mathbb{R}. \tag{2.1.11}$$

▶ С помощью теоремы Фубини нетрудно вычислить, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x-u) p_Y(u)\, du dx =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} p_Y(u) \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p_X(x-u)\, dx du =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itu} p_Y(u)\, du \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p_X(x)\, dx = f_Y(t) f_X(t), t \in \mathbb{R}.$$

Напомним равенство $f_{X+Y}(t) = f_X(t) f_Y(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}$. По теореме 2.1.11 характеристическая функция однозначно определяет распределение случайной величины. Поэтому должно выполняться равенство (2.1.11). Оно называется *формулой свертки.* ◄

Теорема 1.4.13, разумеется, справедлива для вероятности $\mathbb{P}$ вместо внешней меры μ^*. В таком виде она сформулирована в виде теоремы 1.5.16 под названием первой части леммы Бореля – Кантелли (Felix Édouard Justin Émile Borel, Farancesco Paolo Cantelli). Ее дополняет следующая теорема, известная в теории вероятностей под названием второй части леммы Бореля – Кантелли.

2.1.16. Теорема. *Пусть даны любое вероятностное пространство* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *и независимые события* $A_n \in \mathcal{F}, n \in \mathbb{N}$. *Если* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{A_n\} = \infty$, *то* $\mathbb{P}\{\cap_{k=1}^{\infty} \cup_{n=k}^{\infty} A_n\} = 1$.

► Утверждение очевидно, если $\mathbb{P}\{A_n\} = 1$ для бесконечного числа $n \in \mathbb{N}$. Можно считать, что $\mathbb{P}\{A_n\} < 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Утверждение является следствием формулы де Моргана, теоремы 1.4.3 и следующих соотношений

$$\mathbb{P}\{\cap_{k=1}^{\infty} \cup_{n=k}^{\infty} A_n\} = 1 - \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}\{\cap_{n=k}^{\infty} A_n^c\} =$$
$$= 1 - \lim_{k\to\infty} \prod_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}\{A_n^c\} = 1 - \lim_{k\to\infty} e^{\sum_{n=k}^{\infty} \ln(1-\mathbb{P}\{A_n\})} = 1,$$

так как $\sum_{n=k}^{\infty} \ln(1 - \mathbb{P}\{A_n\}) \le -\sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}\{A_n\} = -\infty$. ◄

2.2. Комплексное гильбертово пространство

Большое число утверждений о случайных процессах с конечными вторыми моментами удобно доказывать методами гильбертовых пространств. Напомним некоторые необходимые сведения о гильбертовых пространствах. Любое комплексное число z можно записать в виде линейной комбинации $z = x + iy$, с мнимой единицей $i = \sqrt{-1}$, вещественной части $x = \Re z \in \mathbb{R}$ и мнимой части $y = \Im z \in \mathbb{R}$ числа z. Комплексное число $\overline{z} = x - iy$ называется *сопряженным* к комплексному числу z. Величина $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ называется *нормой* комплексного числа z. Отдавая дань традиции, точки линейного пространства будут называться векторами.

2.2.1. Определение. Множество H векторов называется *комплексным линейным пространством,* если для любых векторов

$x, y \in H$ определена их сумма $x + y \in H$, для любого комплексного (в частности, вещественного) числа α и для любого $x \in H$ определено их произведение $\alpha x \in H$. Существует вектор $0 \in H$ такой, что $x + 0 = x$ для любого $x \in H$. Для любого вектора $x \in H$ существует вектор $-x \in H$ такой, что $x + (-x) = 0$. Произведение αx равно нулевому вектору, если число α равно нулю или вектор x является нулевым. Перечисленные операции для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ и для любых $x, y, z \in H$ должны удовлетворять условиям:

$$(i)\; x + y = y + x, (x + y) + z = x + (y + z);$$
$$(ii)\; 1 \cdot x = x, \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x;$$
$$(iii)\; (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y.$$

Любое подмножество комплексного линейного пространства H, которое само является комплексным линейным пространством с теми же операциями, называется *подпространством* пространства H.

Ради сокращения речи комплексные линейные пространства называют линейными пространствами без упоминания слова *комплексные.* Линейные пространства также называются *векторными* пространствами. Примеры таких пространств уже встречались ранее, например функциональное пространство $\mathcal{L}_p$ из первой главы. Другим примером подпространства может служить *линейная оболочка* $\mathrm{span}(F)$ произвольного множества $F \subset H$. Она состоит из всех возможных линейных комбинаций $\sum_{k=1}^{n} c_k x_k$ векторов $x_1, \ldots, x_n \in F$ с коэффициентами $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$.

2.2.2. Определение. Линейное пространство H называется пространством *со скалярным произведением,* если определена функция $\langle x, y\rangle \colon H \times H \to \mathbb{C}$, называемая *скалярным произведением,* удовлетворяющая следующим условиям:

$$(iv)\; \langle x, x\rangle \geq 0, \text{ причем } \langle x, x\rangle = 0, \text{ если и только если } x = 0;$$
$$(v)\; \langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}, \langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle, \langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$$

для любых $\alpha \in \mathbb{C}, x, y, z \in H$. Любая часть пространства со скалярным произведением H, которая сама является пространством с тем же самым скалярным произведением, называется *подпространством* пространства H.

Из свойств скалярного произведения следует, что

$$\langle x, \alpha y\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle, \langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$$

для любых $\alpha \in \mathbb{C}, x, y \in H$. Величина $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ называется нормой вектора $x \in H$. Докажем, что для любых $x, y \in H$ выполняется *неравенство Коши – Буняковского* (Augustin Louis Cauchy, Виктор Яковлевич Буняковский) $|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$. Оно является обобщением интегрального неравенства тех же авторов из теоремы 1.6.10. Неравенство выполняется, если $\langle x, y\rangle = 0$. Если $\langle x, y\rangle \neq 0$, то для $h = \lambda\langle x, y\rangle/|\langle x, y\rangle|, \lambda \in \mathbb{R}$, выполняется неравенство

$$0 \leq \|x - hy\|^2 = \|x\|^2 - 2\lambda|\langle x, y\rangle| + \lambda^2\|y\|^2.$$

Квадратный трехчлен положителен для всех $\lambda \in \mathbb{R}$. Поэтому его дискриминант $|\langle x, y\rangle|^2 - \|x\|^2\|y\|^2$ неположителен.

Из неравенства Коши – Буняковского вытекает неравенство треугольника $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ для любых $x, y \in H$. Действительно, так как $|\langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle| \leq 2\|x\|\|y\|$, то

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \|y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Из двух равенств $\|x \pm y\|^2 = \langle(x \pm y), (x \pm y)\rangle$ вытекает равенство параллелограмма

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, x, y \in H.$$

Говорят, что последовательность $\{x_n\}_{n\geq 1}$ векторов из пространства со скалярным произведением H сходится *в среднем квадратичном* или *по норме* к вектору $x \in H$, если $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$. Говорят, что последовательность $\{x_n\}_{n\geq 1}$ удовлетворяет *условию Коши в среднем квадратичном* или *по норме,* также говорят, что она *фундаментальна,* если $\lim_{m,n\to\infty} \|x_m - x_n\| = 0$. Пространство H со скалярным произведением называется *гильбертовым пространством,* если любая фундаментальная последовательность сходится в среднем квадратичном к некоторому вектору в H. Свойство сходимости фундаментальных последовательностей называется *свойством полноты.* Можно сказать, что гильбертовым пространством называется любое полное пространство со скалярным произведением. Любая часть гильбертова пространства H, которая сама является гильбертовым пространством с тем же самым скалярным произведением, называется *подпространством* пространства H.

Вектор $x \in H$ называется *предельным* для множества $F \subseteq H$, если существует последовательность $\{x_n\}_{n\geq 1}$ различных векторов из множества F, которая сходится по норме к x. Множество F называется *замкнутым,* если оно содержит все свои предельные точки. Множество G называется *открытым,* если его дополнение является замкнутым множеством. Нетрудно проверить, что любое замкнутое линейное подмножество гильбертова пространства H само является гильбертовым пространством со скалярным произведением, наследуемым от H. Множество $F \subset H$, к которому добавлены все его предельные точки, называется *замыканием* множества F. Замыкание множества $F \subseteq H$ является замкнутым множеством.

Следующая простая теорема является важным средством для изучения многих свойств гильбертова пространства, а также многих свойств случайных процессов второго порядка.

2.2.3. Теорема. *Пусть даны векторы* $x, y, x_t, y_t, t \in T$, *из гильбертова пространства* H. *Пусть* t_0 *и* s_0 *являются предельными точками параметрического множества* T. *Если* $\lim_{t\to t_0} \|x_t - x\| = 0$ *и* $\lim_{s\to s_0} \|y_t - y\| = 0$, *то* $\lim_{s\to s_0, t\to t_0} |\langle x_t, y_s\rangle - \langle x, y\rangle| = 0$.

► С помощью неравенства треугольника можно убедиться, что

$$\Big|\|x_t\| - \|x\|\Big| \leq \|x_t - x\| \to 0 \text{ при } t \to t_0.$$

Поэтому величина $\sup_{t\in U} \|x_t\|$ конечна для некоторой окрестности U точки t_0. Из неравенства Коши – Буняковского следует, что

$$|\langle x_t, y_s\rangle - \langle x, y\rangle| = |\langle x_t, (y_s - y)\rangle + \langle (x_t - x), y\rangle| \leq$$
$$\leq \sqrt{\|y_s - y\|^2 \|x_t\|^2} + \sqrt{\|x_t - x\|^2 \|y\|^2} \to 0$$

при $s \to s_0, t \to t_0$. ◄

Векторы $x, y \in H$ называются *ортогональными,* если $\langle x, y\rangle = 0$. Вектор x называется *нормированным,* если $\|x\| = 1$. Попарно ортогональные, нормированные векторы $x_k, k = 1, \ldots, n$, называются *ортонормированными.* Возьмем $x \in H$ и поставим задачу найти минимум функции $f(c) = \|x - \sum_{k=1}^n c_k x_k\|$ комплексных переменных $c = (c_1, \ldots, c_n)$, предполагая, что векторы $x_1, \ldots, x_n$ ортонормированы. Простые вычисления показывают, что

$$|f(c)|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n \bar{c}_k \langle x, x_k\rangle - \sum_{k=1}^n c_k \langle x_k, x\rangle + \sum_{k=1}^n |c_k|^2.$$

Если воспользоваться равенством

$$|c_k - \langle x, x_k\rangle|^2 = |c_k|^2 - \bar{c}_k \langle x, x_k\rangle - c_k \langle x_k, x\rangle + |\langle x, x_k\rangle|^2,$$

то предыдущее равенство примет следующий вид

$$|f(c)|^2 = \|x\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |c_k - \langle x, x_k \rangle|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, x_k \rangle|^2.$$

Из этого равенства следует решение поставленной задачи

$$\begin{aligned} &\inf |f(c)|^2 = |f(\alpha)|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, x_k \rangle|^2, \\ &\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (\langle x, x_1 \rangle, \ldots, \langle x, x_n \rangle). \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Так как $f(c) \geq 0$ для всех $c \in \mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}$, то

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle x, x_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2. \tag{2.2.2}$$

Это неравенство называется *неравенством Бесселя* (Frierich Wilhelm Bessel). Его можно распространить на случай счетного числа ортонормированных векторов $x_k \in H, k \in \mathbb{N}$, полагая $n \to \infty$.

2.2.4. Определение. Ортонормированная последовательность $\{e_n\}_{n \geq 1}$ векторов из гильбертова пространства H называется *полной,* если не существует ненулевого вектора $x \in H$, ортогонального со всеми $e_n, n \in \mathbb{N}$. Полная ортонормированная последовательность называется *базисом* в гильбертовом пространстве H.

2.2.5. Теорема. *Пусть дана некоторая ортонормированная последовательность векторов* $\{e_n\}_{n \geq 1}$ *из гильбертова пространства* H. (i) *Для любого вектора* $x \in H$ *последовательность* $\{y_n\}_{n \geq 1}$ *векторов* $y_n = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k, n \in \mathbb{N}$, *сходится по норме к некоторому вектору* $y \in H$. (ii) *Если последовательность* $\{e_n\}_{n \geq 1}$ *является базисом в гильбертовом пространстве* H, *то*

$$\lim_{n \to \infty} \|x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k\| = 0 \tag{2.2.3}$$

для любого вектора $x \in H$.

► (i). Из (2.2.2) следует, что $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$ и

$$\lim_{n,m \to \infty} \|y_n - y_m\|^2 = \lim_{n,m \to \infty} \sum_{k=n \wedge m}^{n \vee m} |\langle x, e_k \rangle|^2 = 0.$$

Последовательность $\{y_n\}_{n\geq 1}$ удовлетворяет условию Коши и, следовательно, сходится по норме к некоторому вектору $y \in H$.

(ii). В силу (i) последовательность $\{y_n\}_{n\geq 1}$ сходится по норме к некоторому вектору $y \in H$. Отсюда и из теоремы 2.2.3 следует, что $\langle (x-y), e_r\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle (x-y_n), e_r\rangle = 0$ для любого $e_r, r \in \mathbb{N}$, и, следовательно, $x = y$. Утверждение (2.2.3) доказано. ◀

Из равенства $\|x - \sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle e_k\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n}|\langle x, e_k\rangle|^2$ вытекает равенство Парсеваля (Marc-Antoine Parseval)

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\langle x, e_k\rangle|^2 = \|x\|^2.$$

Оно допускает обобщение на случай двух векторов $x, y \in H$

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\langle x, e_k\rangle|\langle e_k, y\rangle = \langle x, y\rangle. \tag{2.2.4}$$

Действительно, из (2.2.3) и теоремы 2.2.3 следует, что

$$\langle x, y\rangle - \sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle\langle e_k, y\rangle = \langle x - \sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle e_k, y - \sum_{k=1}^{n}\langle y, e_k\rangle e_k\rangle \to 0$$

при $n \to \infty$. Равенство (2.2.4) также носит имя Парсеваля.

В качестве примера будет показано, что функции Хаара образуют базис в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}_2([0,1])$ вещественных функций $f(t), t \in [0,1]$, интегрируемых в квадрате $\int_0^1 |f(x)|^2\,dt < \infty$ по мере Лебега. Множество $\mathcal{L}_2([0,1])$ является вещественным гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt. \tag{2.2.5}$$

Функции $f, g \in \mathcal{L}_2([0,1])$ считаются равными, если они совпадают п.в. по отношению к мере Лебега.

Функции Хаара (Alfréd Haar) $H_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}, n = 0, n \in \mathbb{N}$, определяются по следующему правилу:

$$H_0(t) = 1, t \in [0,1], H_1(t) = \begin{cases} \ \ 1, & t \in [0,1/2], \\ -1, & t \in (1/2,1]. \end{cases}$$

Если $n \in \mathbb{N}, k \in [2^n, 2^{n+1})$, то

$$H_k(t) = \begin{cases} 2^{n/2}, & t \in [(k-2^n)2^{-n}, (k-2^n+1/2)2^{-n}], \\ -2^{n/2}, & t \in ((k-2^n+1/2)2^{-n}, (k-2^n+1)2^{-n}], \\ 0, & t \in [0,1] \setminus [(k-2^n)2^{-n}, (k-2^n+1)2^{-n}]. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что функции Хаара ортонормированы.

2.2.6. Теорема. *Последовательность* $\{H_n\}_{n\geq 0}$ *функций Хаара полна в гильбертовом пространстве* $\mathcal{L}_2[0,1]$.

► Пусть $f \in \mathcal{L}_2([0,1])$ и $\langle f, H_n\rangle = 0$ для всех $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Обозначим $F(t) = \int_0^t f(u)\,du$, $t \in [0,1]$. Условие $\langle f, H_k\rangle = 0$ для $k = 1$ и $k \in [2^n, 2^{n+1}), n \in \mathbb{N}$, можно записать в следующем виде

$$F\left(\frac{k-2^n}{2^n}\right) - 2F\left(\frac{k-2^n+1/2}{2^n}\right) + F\left(\frac{k-2^n+1}{2^n}\right) = 0.$$

Положив $n = 0$ и $k = 1$, а затем $n = 1$ и $k = 2$, можно увидеть, что значения функции F в точках $t = 0, 1/4, 1/2, 1$ лежат на некоторой прямой $y = \alpha t + \beta$. Рассуждая подобным образом, можно убедиться, что значения функции F лежат на прямой $y = \alpha t + \beta$ при $t = k2^{-n}$, $k = 0, \ldots, 2^n$ для любого $n \in \mathbb{N}$. В этом также можно убедиться с помощью рассуждений по индукции. Множество точек указанного вида всюду плотно в $[0,1]$. Поэтому $F(t) = \alpha t + \beta$ для всех $t \in [0,1]$ и, в частности, $\beta = F(0) = 0$. Производная функции F существует п.в. по мере Лебега. Поэтому $F'(t) = f(t) = \alpha$ п.в. по мере Лебега. Из условия $\langle f, H_0\rangle = 0$ следует, что $\alpha = \langle f, H_0\rangle = 0$. ◄

2.2.7. Теорема. *Если* $c_0, c_n \in \mathbb{R}, |c_n| \leq cn^\alpha$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$ *и для некоторых* $c > 0$ *и* $0 < \alpha < 1/2$, *то ряд* $\sum_{n=0}^\infty c_n \int_0^t H_n(u)\,du$ *сходится равномерно по* $t \in [0,1]$.

► Заметим, что функция $S_k(t) = \int_0^t H_k(u)\,du$, $t \in [0,1]$, неотрицательна. Если $2^n \leq k < 2^{n+1}, n \geq 2$, то $S_k(t) \leq 2^{-n/2-1}$ и $S_k(t)S_m(t) = 0$ для $2^n \leq k \neq m < 2^{n+1}, t \in [0,1]$. С учетом неравенства $\max_{2^n \leq k < 2^{n+1}} |c_k| \leq c2^{\alpha(n+1)}$ можно видеть, что

$$\sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} |c_k S_k(t)| \leq c \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n/2-1+\alpha(n+1)} < \infty.$$

По теореме Вейерштрасса (Karl Theodor Wilhelm Weierstraß) ряд из непрерывных функций, почленно мажорируемый абсолютно сходящимся числовым рядом, сходится равномерно. ◄

Подмножества F и G гильбертова пространства H называются *ортогональными,* если любые их представители $x \in F$ и $y \in G$ ортогональны. Запись $F \perp G$ означает, что множества F и G ортогональны. В частности, запись $x \perp F$ означает, что вектор x ортогонален с любым вектором из F. Множество $F^{\perp}$ векторов x таких, что $x \perp F$, называется *ортогональным дополнением* к множеству F. Если вектор $x \in H$ можно записать в виде суммы $x = y + z$ векторов $y \in F$ и $z \perp F$, то вектор y называется *проекцией* вектора x на множество F.

2.2.8. Теорема. (i) *Сумма* $F + G = \{x + y \colon x \in F, y \in G\}$ *ортогональных подпространств* F *и* G *гильбертова пространства* H *является подпространством пространства* H.
(ii) *Ортогональное дополнение* $F^{\perp}$ *к любому множеству* $F \subseteq H$ *является подпространством гильбертова пространства* H.
(iii) *Замыкание любого линейного подпространства* F *гильбертова пространства* H *является гильбертовым пространством.*

► (i). Можно считать очевидным, что множество $F + G$ является линейным подпространством пространства H. Пусть вектор x является предельной точкой множества $F + G$. Имеется последовательность $\{x_n\}_{n \geq 1}, x_n = y_n + z_n, y_n \in F, z_n \in G$, которая сходится по норме к x. В силу ортогональности множеств F и G выполняется равенство $\|x_n - x_m\|^2 = \|y_n - y_m\|^2 + \|z_n - z_m\|^2$. Так как $\lim_{n,m \to \infty} \|x_n - x_m\| = 0$, то последовательности $\{y_n\}_{n \geq 1}$ и $\{z_n\}_{n \geq 1}$ удовлетворяют условию Коши и, следовательно, сходятся по норме к некоторым векторам $y \in F$ и $z \in G$. Тем самым доказано, что множество $F + G$ содержит все свои предельные точки.

(ii). Если $x, y \in F^{\perp}$, то $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle = 0$ для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{C}, z \in F$. Это доказывает, что $F^{\perp}$ является линейным пространством. Пусть вектор x является предельным для множества $F^{\perp}$. Имеется последовательность $\{x_n\}_{n \geq 1}$ векторов из $F^{\perp}$, которая сходится по норме к x. С помощью теоремы 2.2.3 можно убедиться, что $0 = \lim_{n \to \infty} \langle x_n, y \rangle = \langle x, y \rangle$ для любого $y \in F$ и, следовательно, $x \in F^{\perp}$.

(iii). Требуется только доказать, что замыкание множества F является линейным пространством. Пусть $x, y \in H$ являются предельными точками множества F. Найдутся последовательности $\{x_n\}_{n \geq 1}$ и $\{y_n\}_{n \geq 1}$ векторов из F, сходящиеся по норме к x и y. Заметим, что $\alpha x_n + \beta y_n \in F$ для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ и $n \in \mathbb{N}$ и

$$\|(\alpha x + \beta y) - (\alpha x_n + \beta y_n)\| \leq |\alpha| \|x - x_n\| + |\beta| \|y - y_n\| \to 0$$

при $n \to \infty$. Вектор $\alpha x + \beta y$ является предельным для F. ◄

2.2.9. Теорема. *Пусть дано произвольное подпространство K гильбертова пространства H. Для любого вектора $x \in H$ существуют единственные векторы $y \in F, z \in K^{\perp}$ такие, что $x = y + z$.*

► Если $x \in K$, то в качестве проекции y следует взять сам вектор x. Далее предполагается, что $x \notin K$. Напомним, что величина $\rho(x, K) = \inf\{\|x - x'\| \colon x' \in K\}$ называется расстоянием между точкой $x \in H$ и множеством K. С помощью неравенства треугольника $\|x' - x''\| \le \|x' - x'''\| + \|x''' - x''\|$ для любых $x', x'', x''' \in H$ можно убедиться, что $|\rho(x', K) - \rho(x'', K)| \le \|x' - x''\|$. В силу этого неравенства функция ρ непрерывна. Так как функция ρ непрерывна и множество K замкнуто, то $d = \rho(x, F) > 0$. Существуют $y_n \in K, n \in \mathbb{N}$, такие, что $\lim_{n\to\infty} \|x - y_n\| = d$. Воспользуемся равенством параллелограмма

$$2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 = 4\|x - \frac{y_m + y_n}{2}\|^2 + \|y_m - y_n\|^2.$$

Величина слева стремится к $4d^2$ при $m, n \to \infty$. Первое слагаемое справа не может быть меньше $4d^2$. Поэтому последовательность $\{y_n\}_{n\ge1}$ удовлетворяет условию Коши $\lim_{m,n\to\infty} \|y_m - y_n\|^2 = 0$ и, следовательно, сходится по норме к некоторому $y \in H$. Так как $y_n \in K$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и множество K замкнуто, то $y \in K$. Заметим, что $\|x - y\| = d$. Докажем, что вектор $z = x - y$ и множество K ортогональны. С этой целью заметим, что для любого $t \in K$ и для любого числа $h \in \mathbb{C}$ выполняется неравенство

$$d^2 \le \|x - (y - ht)\|^2 = \|z + ht\|^2 = \|z\|^2 + 2\Re(h\langle t, \overline{z}\rangle) + |h|\|t\|^2.$$

Так как $\|z\|^2 = d^2$, то $0 \le 2\Re(h\langle t, \overline{z}\rangle) + |h|\|t\|^2$. Это неравенство может выполняться для всех $h \in \mathbb{C}$ только, если $\langle t, z\rangle = 0$.

Докажем утверждение о единственности. Если $x = y + z$ и $x = y' + z'$ для некоторых $y, y' \in K, z, z' \perp K$, то $y - y' = z' - z \in K$ и $z' - z \perp K$. Поэтому вектор $z - z'$ ортогонален сам с собой и, следовательно, $z = z'$, а также $y - y' = z' - z = 0$. ◄

2.2.10. Теорема. *Пусть даны любые векторы $z_1, \ldots, z_n$ гильбертова пространства H. Тогда проекция $\hat{z}$ произвольного вектора $z \in H$ на множество $\operatorname{span}(z_1, \ldots, z_n)$ является линейной комбинацией $\hat{z} = \sum_{k=1}^n c_k z_k$ с некоторыми коэффициентами $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$. Если векторы $z_1, \ldots, z_n$ ортонормированы, то $\hat{z} = \sum_{k=1}^n \langle z, z_k\rangle z_k$.*

► Заметим, что линейная оболочка $\mathrm{span}(z_1, \ldots, z_n)$ является подпространством гильбертова пространства H. В предыдущей теореме доказано, что $\|z - \hat{z}\| = \inf\{\|z - x\| \colon x \in \mathrm{span}(z_1, \ldots, z_n)\}$. Если векторы $z_1, \ldots, z_n$ ортонормированы, то вектор $\hat{z}$ имеет указанный вид в силу решения (2.2.1) задачи на минимум. Предположим, что векторы $z_1, \ldots, z_n$ не являются ортонормированными. Можно считать, что не все из них равны нулю. В противном случае утверждение очевидно. С помощью стандартных рассуждений, известных из курса линейной алгебры, можно построить ортонормированные векторы $e_1, \ldots, e_r \in \mathrm{span}(z_1, \ldots, z_n), r \leq n$, такие, что выполняется равенство $\mathrm{span}(z_1, \ldots, z_n) = \mathrm{span}(e_1, \ldots, e_r)$. По доказанному выше проекция $\hat{z}$ имеет следующий вид $\hat{z} = \sum_{k=1}^{r} \langle z, e_k \rangle e_k$ и, следовательно, является линейной комбинацией векторов $z_1, \ldots, z_n$. ◄

2.3. Преобразование Фурье конечных мер

Характеристические функции случайных векторов являются одним из основных средств исследования многих свойств случайных процессов. Они являются преобразованиями Фурье вероятностных распределений на конечномерных евклидовых пространствах. Любая конечная мера отличается от вероятностной меры некоторым положительным сомножителем. Поэтому естественно изучать преобразования Фурье конечных мер. Здесь собраны необходимые сведения о преобразованиях Фурье конечных мер, определенных на борелевской сигма-алгебре вещественной прямой.

2.3.1. Определение. Пусть дана произвольная конечная мера $\mu \colon \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$. Функция

$$\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\, \mu\{dx\}, t \in \mathbb{R}, \tag{2.3.1}$$

называется *преобразованием Фурье* меры μ.

2.3.2. Теорема. *Преобразование Фурье любой конечной меры является ограниченной равномерно непрерывной функцией.*

► Функция $\hat{f}$ ограничена $|\hat{f}(t)| \leq \mu\{\mathbb{R}\}$. Докажем, что она равномерно непрерывна. Воспользуемся неравенством

$$|\hat{f}(t_1) - \hat{f}(t_2)| = \Big| \int_{-\infty}^{\infty} e^{it_1 x}(1 - e^{i(t_2-t_1)x})\,\mu\{dx\}\Big| \leq$$
$$\leq \int_{-c}^{c} |1 - e^{i(t_2-t_1)x}|\,\mu\{dx\} + 2\int_{\{|x|>c\}} \mu\{dx\}$$

для любых $t_1, t_2 \in \mathbb{R}, c > 0$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется $c > 0$ такое, что $\int_{\{|x|>c\}} \mu\{dx\} < \varepsilon/4$. В силу неравенства $|1 - e^{i\alpha}| \leq |\alpha|$ для $\alpha \in \mathbb{R}$ справедлива оценка $|1 - e^{i(t_2-t_1)x}| \leq |x||t_2 - t_1|$. Обозначим $\delta = \varepsilon/(2c(1 + \mu\{\mathbb{R}\}))$. Функция $\hat{f}$ равномерно непрерывна, так как для любых $t_1, t_2 \in \mathbb{R}, |t_1 - t_2| < \delta$, выполняются неравенства

$$|\hat{f}(t_1) - \hat{f}(t_2)| \leq c|t_2 - t_1| \int_{\{|x|\leq c\}} \mu\{dx\} + 2\int_{\{|x|>c\}} \mu\{dx\} < \varepsilon. \quad \blacktriangleleft$$

2.3.3. Пример. Для любого числа $\lambda > 0$ функции $H_\lambda(t) = e^{-\lambda|t|}$ и $h_\lambda(t) = \lambda/(\pi(\lambda^2 + t^2)), t \in \mathbb{R}$, связаны равенствами

$$h_\lambda(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} H_\lambda(x)\,dx, H_\lambda(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} h_\lambda(x)\,dx.$$

В этом можно убедиться с помощью несложных вычислений. Функция H_λ является преобразованием Фурье конечной меры $\mu\{A\} = \int_A h_\lambda(x)\,dx, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. При $t = 0$ второе равенство принимает следующий вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_\lambda(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2}\,dx = 1. \tag{2.3.2}$$

2.3.4. Теорема. *Пусть дана произвольная конечная мера* $\mu\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$. *Если* μ*-интегрируемая функция* $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *удовлетворяет условию* $\int_{\mathbb{R}} e^{itx} g(x)\,\mu\{dx\} = 0$ *для всех* $t \in \mathbb{R}$, *то она равна нулю п.в. по отношению к мере* μ.

$\blacktriangleright$ Предположим дополнительно, что функция принимает только вещественные значения. Обозначим $g^\pm$ положительную и отрицательную части функции g и определим две конечные меры $\mu^\pm\{A\} = \int_A g^\pm\,\mu\{dx\}, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Из условия теоремы следует, что

$$\int_{\mathbb{R}} e^{itx}\,\mu^+\{dx\} - \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\,\mu^-\{dx\} = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} g(x)\,\mu\{dx\} = 0.$$

По теореме 2.1.11 меры $\mu^{\pm}$ равны, и, следовательно,

$$\int_{\mathbb{R}} g^{+}(x)\frac{g^{+}(x)}{1+g^{+}(x)}\,\mu\{dx\} = \int_{\mathbb{R}} g^{-}(x)\frac{g^{+}(x)}{1+g^{+}(x)}\,\mu\{dx\} = 0,$$

так как $g^{+}(x)g^{-}(x) = 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$. По теореме 1.6.7 функция g^{+} равна нулю п.в. по отношению к мере μ. В этих рассуждениях функции g^{+} и g^{-} можно поменять ролями и доказать, что $g^{-} = 0$ п.в. по отношению к мере μ. Рассмотрим общий случай.

По условию функция $\int_{\mathbb{R}} e^{itx} g(x)\,\mu\{dx\}$ равна нулю для всех $t \in \mathbb{R}$. Поэтому интегралы от вещественной и мнимой частей подынтегральной функции должны равняться нулю

$$\int_{\mathbb{R}} \Re(e^{itx}g(x))\,\mu\{dx\} = \int_{\mathbb{R}} (\cos(tx)\Re g(x) - \sin(tx)\Im g(x))\,\mu\{dx\} = 0,$$
$$\int_{\mathbb{R}} \Im(e^{itx}g(x))\,\mu\{dx\} = \int_{\mathbb{R}} (\sin(tx)\Re g(x) + \cos(tx)\Im g(x))\,\mu\{dx\} = 0.$$

Заметим, что функция $\int_{\mathbb{R}} \cos(tx)\Re g(x)\,\mu\{dx\}, t \in \mathbb{R}$, четная, а функция $\int_{\mathbb{R}} \sin(tx)\Im g(x)\,\mu\{dx\}, t \in \mathbb{R}$, нечетная. Они равны в силу первого равенства, и, следовательно, каждая из них равна нулю. По тем же причинам функции $\int_{\mathbb{R}} \sin(tx)\Re g(x)\,\mu\{dx\}$ и $\int_{\mathbb{R}} \cos(tx)\Im g(x)\,\mu\{dx\}$ переменного $t \in \mathbb{R}$ также равны нулю. Отсюда и из формул Эйлера (Leonhard Euler) $2\cos\alpha = e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}$ и $2i\sin\alpha = e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$, следует, что

$$\int_{\mathbb{R}} e^{itx}\Re g(x)\,\mu\{dx\} = 0, \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\Im g(x)\,\mu\{dx\} = 0, t \in \mathbb{R}.$$

По доказанному выше вещественные функции $\Re g(x)$ и $\Im g(x), x \in \mathbb{R}$, равны нулю п.в. по отношению к мере μ. ◀

Функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ вида $f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{it_k x}$ для произвольных $n \in \mathbb{N}, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$, $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$, называется *тригонометрическим* полиномом. Из многочисленных свойств таких функций, нам понадобится свойство плотности, описанное в следующей теореме.

2.3.5. Теорема. *Для любой конечной меры* $\mu\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ *и для любой функции* $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, *интегрируемой в квадрате по мере* $\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2\,\mu\{dx\} < \infty$, *найдется последовательность* $\{g_n\}_{n\geq 1}$ *тригонометрических полиномов такая, что*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |g_n(x) - g(x)|^2\,\mu\{dx\} = 0. \tag{2.3.3}$$

▶ Обозначим $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}, \mu)$ множество всех функций $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, интегрируемых в квадрате $\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 \, \mu\{dx\} < \infty$. Это множество является комплексным гильбертовым пространством со скалярным произведением $\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g}(x)\, \mu\{dx\}$. Тригонометрические полиномы, интегрируемые в квадрате по мере μ, являются векторами указанного гильбертова пространства.

Назовем тригонометрический полином $f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{it_k x}$ аргумента $x \in \mathbb{R}$ рациональным, если $t_1, \dots, t_n$ являются рациональными числами и коэффициенты $c_1, \dots, c_n$, являются рациональными комплексными числами в том смысле, что их вещественные $\Re c_k$ и мнимые $\Im c_k$ части являются рациональными числами. Выделим среди всех таких полиномов те, которые интегрируемы $\|f\|^2 = \int_{\mathbb{R}} ||f(x)|^2 \, \mu\{dx\} < \infty$ в квадрате, и эти интегралы строго положительны $\|f\|^2 > 0$. Таких полиномов найдется не более счетного числа. Занумеруем их в виде последовательности $\{f_n\}_{n\ge1}$. По известному правилу можно построить ортонормированную последовательность тригонометрических полиномов. Напомним это правило. Положим $e_1 = f_1/\|f_1\|$ и заметим, что линейные оболочки $\mathrm{span}(e_1)$ и $\mathrm{span}(f_1)$ совпадают. Далее можно рассуждать по индукции. Предположим, что уже построены ортонормированные тригонометрические полиномы $e_1, \dots, e_n$ такие, что линейные оболочки $\mathrm{span}(e_1, \dots, e_n)$ и $\mathrm{span}(f_1, \dots, f_n)$ совпадают. По теореме 2.2.9 существует проекция g функции f_{n+1} на множество $\mathrm{span}(f_1, \dots, f_n)$. Функция $f_{n+1} - g$ ортогональна к множеству $\mathrm{span}(f_1, \dots, f_n)$. Так как выполняется равенство $\mathrm{span}(f_1, \dots, f_n) = \mathrm{span}(e_1, \dots, e_n)$, то, положив $e_{n+1} = (f_{n+1} - g)/\|f_{n+1} - g\|$, получится ортонормированное множество $e_1, \dots, e_{n+1}$. Требуемая ортонормированная последовательность $\{e_n\}_{n\ge1}$ построена. Заметим, что каждый рациональный тригонометрический полином является линейной комбинацией некоторых функций из построенной ортонормированной последовательности. Докажем, что последовательность $\{e_n\}_{n\ge1}$ образует базис в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}, \mu)$. Предположим противное, что существует функция $g \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}, \mu)$ такая, что $\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 \, \mu\{dx\} \ne 0$, и ортогональная с каждой функцией $e_n, n \in \mathbb{N}$. Так как каждый рациональный полином f является линейной комбинацией некоторых функций из ортонормированной последовательности, то $\langle g, f\rangle = 0$ и, в частности, для $f(x) = e^{itx}, x \in \mathbb{R}$, с любым рациональным t. Равенство $\int_{\mathbb{R}} e^{itx}\overline{g}(x)\, \mu\{dx\} = \langle f, g\rangle = 0$ для любых рациональных t влечет равенство $\int_{\mathbb{R}} e^{itx}\overline{g}(x)\,\mu\{dx\} = 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$, так как преобразование Фурье меры μ является непрерывной функцией. По теореме 2.3.4 функция g равна нулю п.в. по отношению к мере μ, что ведет к противоречию $0 < \int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2\,\mu\{dx\} = 0$. Тем самым доказано, что последовательность $\{e_n\}_{n\geq 1}$ составляет базис в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}, \mu)$. По теореме 2.2.5 найдется последовательность $\{g_n\}_{n\geq 1}$ тригонометрических полиномов со свойством (2.3.3). ◀

2.3.6. Определение. Функция $R\colon T \to \mathbb{C}$, определенная на $T = \mathbb{R}$ или $T = \mathbb{Z}$, называется *положительно определенной,* если

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} R(t_k - t_m) z_k \overline{z}_m \geq 0 \tag{2.3.4}$$

для любых $n \in \mathbb{N}, t_1, \ldots, t_n \in T, z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$.

Если положить $n = 1$ и $z_1 = 1$, то $0 \leq R(0)$. Если положить $n = 2, t_1 = t, t_2 = 0, z_1 = i, z_2 = 1$, то мнимая часть $\Re R(t) - \Re R(-t)$ двойной суммы должна равняться нулю и, следовательно, выполняется равенство $\Re R(t) = \Re R(-t)$ для всех $t \in T$. Если положить $n = 2, t_1 = t, t_2 = 0, z_1 = z_2 = 1$, то получится равенство $\Im R(-t) = -\Im R(t)$ для всех $t \in T$. Тем самым доказано, что любая положительно определенная функция R обладает свойством эрмитовости $R(-t) = \overline{R}(t)$ для всех $t \in T$. Если положить $n = 2, t_1 = t, t_2 = 0, z_1 = \overline{R}(t), z_2 = x \in \mathbb{R}$, то получится неравенство $R(0)|R(t)|^2 + 2|R(t)|^2 x + R(0)x^2 \geq 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Дискриминант $4|R(t)|^4 - 4|R(0)|^2|R(t)|^2$ указанного положительного трехчлена не может быть строго положительным, и, следовательно, выполняется неравенство $|R(t)| \leq R(0)$ для всех $t \in T$.

2.3.7. Пример. Преобразование Фурье $\hat{f}$ любой конечной меры $\mu\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ является положительно определенной функцией.

Требуемое свойство вытекает из следующих соотношений

$$\sum_{k=1}^{k}\sum_{m=1}^{n} \hat{f}(t_k - t_m) z_k \overline{z}_m = \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} e^{it_k x} z_k \overline{e^{it_m x} z_m}\,\mu\{dx\} =$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \Big|\sum_{k=1}^{n} e^{it_k x} z_k\Big|^2 \mu\{dx\} \geq 0$$

для любого $n \in \mathbb{N}$ и для любых комплексных чисел $z_1, \ldots, z_n$.

2.3.8. Пример. Произведение $H_\lambda(t)R(t), t \in \mathbb{R}$, функции H_λ из примера 2.3.3 и любой положительно определенной функцией $R(t), t \in \mathbb{R}$, является положительно определенной функцией.

► Действительно, для любого $n \in \mathbb{N}$ и для любых комплексных чисел $z_1, \dots, z_n$, справедливы соотношения

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} R(t_k - t_r) H_\lambda(t_k - t_r) z_k \overline{z}_r =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} R(t_k - t_r) e^{i(t_k - t_r)x} z_k \overline{z}_r h(x)\, dx \geq 0,$$

так как двойная сумма под знаком интеграла неотрицательна для всех вещественных чисел x.

2.3.9. Теорема. *Пусть дана непрерывная положительно определенная функция $R\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Если $\int_{-\infty}^{\infty} |R(t)|\, dt < \infty$, то*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} R(t)\, dt \geq 0, x \in \mathbb{R}, \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx < \infty. \qquad (2.3.5)$$

► Убедимся, что для любого $c > 0$ функция

$$f_c(x) = \frac{1}{2\pi c}\int_0^c \int_0^c e^{-iux} e^{ivx} R(u - v)\, du dv, x \in \mathbb{R}, \qquad (2.3.6)$$

принимает неотрицательные значения. Разобьем сегмент $[0, c]$ точками $0 = u_0 < u_1 < \cdots < u_n = c$, чтобы выполнялось условие $\max_{1 \leq k \leq n}(u_k - u_{k-1}) \to 0$ при $n \to \infty$. Подынтегральная функция в (2.3.6) непрерывна. Поэтому (по определению интеграла Римана)

$$2\pi c f_c(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} R(u_k - u_m) e^{-ixu_k} e^{ixu_m}.$$

По условию (2.3.4) двойная сумма неотрицательна и, следовательно, $f_c(x) \geq 0$ для всех $c > 0$ и $x \in \mathbb{R}$. Преобразование $u = u, v = u - t$ переменных интегрирования позволяет переписать двойной интеграл (2.3.6) в следующем виде

$$f_c(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c} e^{-itx}(1 - \frac{|t|}{c}) R(t)\, dt.$$

По теореме об ограниченной сходимости можно перейти к пределу при $c \to \infty$ под знаком интеграла, и, следовательно,

$$0 \leq \lim_{c\to\infty} f_c(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} R(t)\, dt = f(x), x \in \mathbb{R}. \qquad (2.3.7)$$

Докажем, что интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f_c(x)\,dx$ ограничен равномерно по $c > 0$. Неотрицательная функция $f_c(x), x \in \mathbb{R}$, непрерывна, следовательно, она интегрируема на любом сегменте $[-y, y], y > 0$. Обозначим $g_c(y) = \int_{-y}^{y} f_c(x)\,dx$ и $\lambda_c(z) = z^{-1}\int_z^{2z} g_c(y)\,dy$ для $z > 0$. Так как функция $g_c(y), y > 0$, возрастает, то $g_c(z) \le \lambda_c(z)$ для всех $z > 0$. Поэтому достаточно доказать, что функция $\lambda_c(z), z > 0$, ограничена равномерно по $c > 0$. С помощью леммы Фубини величину $g_c(y)$ можно записать в следующем виде

$$g_c(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-y}^{y}\int_{-c}^{c} e^{-itx}(1-\frac{|t|}{c})R(t)\,dtdx = \frac{1}{\pi}\int_{-c}^{c}\frac{\sin(yt)}{t}(1-\frac{|t|}{c})R(t)dt.$$

Снова с помощью теоремы Фубини величину $\lambda_c(z)$ можно представить в следующем виде

$$\begin{aligned}\lambda_c(z) &= \frac{1}{\pi z}\int_{-c}^{c}\int_{z}^{2z}\frac{\sin(yt)}{t}(1-\frac{|t|}{c})R(t)\,dydt = \\ &= \frac{1}{\pi z}\int_{-c}^{c}\frac{\cos(zt)-\cos(2zt)}{t^2}(1-\frac{|t|}{c})R(t)\,dt.\end{aligned}$$

С помощью формулы двойного угла $\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha), \alpha \in \mathbb{R}$, последний интеграл можно преобразовать к следующему виду

$$\lambda_c(z) = \frac{2}{\pi z}\int_{-c}^{c}\frac{\sin^2(zt)-\sin^2(zt/2)}{t^2}(1-\frac{|t|}{c})R(t)\,dt.$$

Так как $|(1-|t|/c)R(t)| \le R(0)$ для $|t| \le c$, то

$$\begin{aligned}\lambda_c(z) &\le \frac{2R(0)}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2(zt)+\sin^2(zt/2)}{zt^2}\,dt = \\ &= \frac{2R(0)}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2(w)+\sin^2(w/2)}{w^2}\,dw.\end{aligned}$$

В (2.3.7) доказано, что $\lim_{c\to\infty} f_c(x) = f(x)$. Отсюда, в силу леммы Фату (теорема 1.6.4), следует, что

$$\int_{-z}^{z} f(x)\,dx \le \liminf_{c\to\infty} g_c(z) \le \sup_{z>0,c>0}\lambda_c(z) < \infty$$

и $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx < \infty$. Все утверждения в (2.3.5) доказаны. ◄

Доказанная ниже теорема Бохнера – Хинчина (Salomon Bochner, Александр Яковлевич Хинчин) содержит описание непрерывных положительно определенных функций.

2.3.10. Теорема. *Для любой непрерывной положительно определенной функции* $R\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *существует единственная конечная мера* $\mu\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ *такая, что*

$$R(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\,\mu\{dx\}, t \in \mathbb{R}. \tag{2.3.8}$$

▶ Сначала будет доказано утверждение о существовании меры μ. Интерес представляет только случай $R(0) > 0$. Напомним, что $|R(t)| \le R(0)$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Ради удобства последующих записей будет предполагаться, что $R(0) = 1$. Для любого $\lambda > 0$ функция $R(t)H_\lambda(t), t \in \mathbb{R}$, интегрируема по Лебегу и положительно определена в силу примера 2.3.8. По теореме 2.3.9 функция $f_\lambda(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} R(t)H_\lambda(t)\,dt, x \in \mathbb{R}$, неотрицательна и интегрируема по Лебегу. Она соответствует характеристической функции $R(t)H_\lambda(t), t \in \mathbb{R}$, некоторой случайной величины и, следовательно, должны выполняться равенства

$$R(t)H_\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\,\mu_\lambda\{dx\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,dF_\lambda(x), t \in \mathbb{R}, \tag{2.3.9}$$

где $\mu_\lambda\{A\} = (2\pi)^{-1}\int_A f_\lambda(x)\,dx, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, и $F_\lambda(x) = \mu_\lambda\{(-\infty, x]\}$, $x \in \mathbb{R}$. Обратим внимание, что $F_\lambda(-\infty) = 0$ и $F_\lambda(\infty) = 1$. Ниже будет доказано, что существуют неубывающая, непрерывная справа функция $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ со свойствами $F(-\infty) = 0$ и $F(\infty) = 1$, а также последовательность $\{F_{\lambda_n}\}_{n\ge 1}$ такая, что $\lambda_n \downarrow 0$ при $n \uparrow \infty$ и $\lim_{n\to\infty} F_{\lambda_n}(x) = F(x)$ для любой точки $x \in \mathbb{R}$ непрерывности функции F. Кроме того, будет доказано, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,dF_{\lambda_n}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,dF(x), t \in \mathbb{R}. \tag{2.3.10}$$

Из (2.3.9) и (2.3.10) следует представление (2.3.8) с мерой Лебега – Стилтьеса $\mu\{A\} = \mu_F\{A\}, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, построенной по функции F.

Докажем существование функций F и $F_{\lambda_n}, n \in \mathbb{N}$, с перечисленными свойствами. Напомним, что все функции $F_\lambda, \lambda > 0$, ограничены. Запишем множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ в виде последовательности $\{r_m\}_{m\ge 1}$. Положим $\lambda_n = 1/n, n \in \mathbb{N}$. Диагональным методом можно построить подпоследовательность $\{F_{\lambda_{k_n}}\}_{n\geq 1}$ такую, что для любого $m \in \mathbb{N}$ последовательность $\{F_{\lambda_{k_n}}(r_m)\}_{n\geq 1}$ сходится к некоторому числу $G(r_m)$. При этом выполняется неравенство $G(r) \leq G(r')$, если $r, r' \in \mathbb{Q}$ и $r < r'$. Можно считать, что сама последовательность $\{F_{\lambda_n}\}_{n\geq 1}$ обладает этим свойством. Определим функцию $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, положив $F(x) = \inf_{\mathbb{Q}\ni r>x} G(r)$. Нетрудно проверить, что функция F не убывает, непрерывна справа и $\lim_{n\to\infty} F_{\lambda_n}(x) = F(x)$ в каждой точке $x \in \mathbb{R}$ непрерывности функции F. Вычислим интегралы от левой и правой частей равенства (2.3.9) по сегменту $[-\delta, \delta]$ для любого $\delta > 0$. Это приведет к следующим соотношениям

$$\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta}(1 - R(t)H_\lambda(t))\,dt = \frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\infty}^{\infty}(1 - e^{itx})\,dF_\lambda(x)\,dt =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}(1 - \frac{\sin(\delta x)}{\delta x})\,dF_\lambda(x) \geq \int_{\{|\delta x|\geq 2\}}(1 - \frac{\sin(\delta x)}{\delta x})\,dF_\lambda(x).$$

Возьмем $\delta > 0$ такое, чтобы $\pm 2/\delta$ были точками непрерывности функции F, и устремим $\lambda = \lambda_n \to 0$. В результате получится неравенство

$$\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta}(1 - R(t))\,dt \geq \frac{1}{2}(1 - F(2/\delta) + F(-2/\delta)).$$

Величина слева может быть сделана произвольно малой путем выбора числа $\delta > 0$. Отсюда следует, что $F(-\infty) = 0$ и $F(\infty) = 1$. Чтобы завершить доказательство теоремы, осталось доказать утверждение (2.3.10). Ниже будет доказано более общее утверждение, а именно вместо функции $e^{itx}, x \in \mathbb{R}$, будет стоять произвольная непрерывная, ограниченная функция $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Ради простоты записи будет предполагаться, что $|g(x)| \leq 1$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

Для любого $\varepsilon > 0$ найдется $b > 0$ такое, что $\pm b$ являются точками непрерывности функции F и $\int_{\{|x|>b\}} dF(x) < \varepsilon/4$. Разобьем сегмент $[-b, b]$ точками $-b = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$ таким образом, чтобы точки деления были точками непрерывности функции F и выполнялось неравенство $\max_{x_{k-1}\leq x\leq x_k} |g(x) - g(x_k)| < \varepsilon/4$ для всех $k = 1, \ldots, m$. Такие точки найдутся, так как существует не более счетного числа точек разрыва функции F и функция g равномерно непрерывна на сегменте $[-b, b]$. Разность интегралов из (2.3.10) с g

вместо e^{itx} можно переписать в следующем сокращенном виде

$$\begin{aligned} &\Big|\int_{-\infty}^{\infty} g\,dF_{\lambda_n} - \int_{-\infty}^{\infty} g\,dF\Big| = \Big|\int_{-b}^{b} g\,dF_{\lambda_n} - \int_{-b}^{b} g\,dF + J_n\Big|,\\ &J_n = \int_{\{|x|>b\}} g\,dF_{\lambda_n} - \int_{\{|x|>b\}} g\,dF. \end{aligned} \tag{2.3.11}$$

Так как $\lim_{n\to\infty} F_{\lambda_n}(\pm b) = F(\pm b)$, то

$$\limsup_{n\to\infty} |J_n| \le \lim_{n\to\infty} \int_{\{|x|>b\}} dF_{\lambda_n} + \int_{\{|x|>b\}} dF < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.3.12}$$

Запишем разность других двух интегралов в следующем виде

$$\Big|\int_{-b}^{b} g\,dF_{\lambda_n} - \int_{-b}^{b} g\,dF\Big| = \Big|\sum_{k=1}^{m}\int_{x_{k-1}}^{x_k} (g(x)-g(x_k))\,dF_{\lambda_n} -$$
$$- \sum_{k=1}^{m}\int_{x_{k-1}}^{x_k} (g(x)-g(x_k))\,dF - \sum_{k=1}^{m} g(x_k)(\int_{x_{k-1}}^{x_k} dF_{\lambda_n} - \int_{x_{k-1}}^{x_k} dF)\Big|.$$

Выбор точек деления приводит к следующей оценке

$$\Big|\int_{-b}^{b} g\,dF_{\lambda_n} - \int_{-b}^{b} g\,dF\Big| \le \frac{\varepsilon}{4}\sum_{k=1}^{m}\Big(\int_{x_{k-1}}^{x_k} dF_{\lambda_n} + \int_{x_{k-1}}^{x_k} dF\Big) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{m}\Big|\int_{x_{k-1}}^{x_k} dF_{\lambda_n} - \int_{x_{k-1}}^{x_k} dF\Big| \le \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^{m}\Big|\int_{x_{k-1}}^{x_k} dF_{\lambda_n} - \int_{x_{k-1}}^{x_k} dF\Big|.$$

Так как $\lim_{n\to\infty} F_{\lambda_n}(x_k) = F(x_k)$ для всех $k = 1, \ldots, m$, то

$$\limsup_{n\to\infty}\Big|\int_{-b}^{b} g\,dF_{\lambda_n} - \int_{-b}^{b} g\,dF\Big| \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из этой оценки и (2.3.11)–(2.3.12) следует, что

$$\limsup_{n\to\infty}\Big|\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dF_{\lambda_n}(x) - \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dF(x)\Big| \le \varepsilon.$$

Число $\varepsilon > 0$ можно взять произвольно малым. Поэтому верхний предел совпадает с обычным пределом и этот предел равен нулю.

Мера μ из представления (2.3.8) однозначно определяется по функции R. Действительно, μ является мерой Лебега–Стилтьеса, построенной по функции F. Из доказательства видно, что функция F однозначно определяется по функции R. ◄

Теорема Герглотца (Gustav Herglotz), доказанная ниже, содержит описание положительно определенных функций $R\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$.

2.3.11. Теорема. *Для любой положительно определенной функции* $R\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ *существует единственная конечная мера* μ, *определенная на сигма-алгебре* $\mathcal{B}((-\pi, \pi])$ *борелевских подмножеств множества* $(-\pi, \pi]$, *такая, что*

$$R(t) = \int_{(-\pi,\pi]} e^{itx}\, \mu\{dx\}, t \in \mathbb{Z}. \tag{2.3.13}$$

► Доказательство похоже на доказательство предыдущей теоремы. В частности, доказательство утверждения о единственности меры совпадает с доказательством соответствующего утверждения из предыдущей теоремы. Докажем утверждение о существовании меры μ при предположении, что $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |R(n)| < \infty$. Позже это дополнительное условие будет устранено. Для любого $n \in \mathbb{N}$ определим функцию $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, положив

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{n-1} R(k-m) e^{-ixk} e^{ixm}.$$

Функция f_n принимает неотрицательные значения в силу свойства (2.3.4). Преобразование переменных $k = k, m = k - t$ позволяет преобразовать двойную сумму к следующему виду

$$f_n(x) = \sum_{t=-n+1}^{n-1} R(t) e^{-ixt} (1 - \frac{|t|}{n}).$$

Докажем, что для любого $x \in \mathbb{R}$ последовательность $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ сходится. Так как $\sum_{t=-\infty}^{\infty} |R(t)| < \infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $r = r(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такое, что $\sum_{|t|\geq r} |R(t)| < \varepsilon/4$. Из неравенства

$$|f_n(x) - f_{n+m}(x)| \leq \Big| \sum_{t=-r+1}^{r-1} R(t) e^{-itx} (\frac{|t|}{n+m} - \frac{|t|}{n}) \Big| + 4 \sum_{|t|\geq r} |R(t)|$$

для $n \geq r$ и $m \in \mathbb{N}$ следует, что $\limsup_{n\to\infty} |f_n(x) - f_{n+m}(x)| < \varepsilon$ для любого $m \in \mathbb{N}$. Так как число $\varepsilon > 0$ можно взять произвольно малым, то $\lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f_{n+m}(x)| = 0$. Последовательность

$\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ удовлетворяет условию Коши и, следовательно, сходится. Определим функцию $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, положив $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ для $x \in \mathbb{R}$. Функции $f_n, n \in \mathbb{N}$, ограничены числом $\sum_{|t|\geq 0} |R(t)|$. Для любого $k \in \mathbb{Z}, |k| < n$, все слагаемые, кроме $t = k$, в сумме справа

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} f_n(x)\,dx = \sum_{t=-n+1}^{n-1} \int_{-\pi}^{\pi} R(t)e^{i(k-t)x}(1 - \frac{|t|}{n})\,dx = R(k)(1 - \frac{|k|}{n})$$

равны нулю. Отсюда следует, что

$$R(t) = \lim_{n\to\infty} R(t)(1 - \frac{|t|}{n}) = \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{itx} f_n(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{itx} f(x)\,dx.$$

Равенство (2.3.13) выполняется с конечной мерой $\mu\{A\} = \int_A f(x)\,dx$, $A \in \mathcal{B}((-\pi, \pi])$. Обратимся к общему случаю.

Выше отмечалось, что для любого $\lambda > 0$ функция $H_\lambda(t) = e^{-\lambda|t|}$, $t \in \mathbb{R}$, положительно определена. В силу примера 2.3.8 функция $R(t)H_\lambda(t), t \in \mathbb{Z}$, положительно определена. Она удовлетворяет условию $\sum_{t=-\infty}^{\infty} |R(t)H_\lambda(t)| < \infty$, так как функция R ограничена. Определим функцию $f_{\lambda,n}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, положив

$$f_{\lambda,n}(x) = \sum_{t=-n+1}^{n-1} R(t)H_\lambda(t)e^{-ixt}(1 - \frac{|t|}{n}), x \in \mathbb{R}.$$

Последовательность $\{f_{\lambda,n}\}_{n\geq 1}$ сходится к некоторой ограниченной, неотрицательной функции $f_\lambda(x), x \in \mathbb{R}$, и выполняются равенства

$$R(t)H_\lambda(t) = \int_{(-\pi,\pi]} e^{itx} \mu_\lambda\{dx\} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{itx} dF_\lambda(x), t \in \mathbb{Z},$$

где $\mu_\lambda\{A\} = \int_A f_\lambda(x)dx, A \in \mathcal{B}((-\pi, \pi])$. Функция F_λ определяется по правилу $F_\lambda(x) = \mu\{(-\pi, x]\}, x \in (-\pi, \pi]$. Заметим, что $F_\lambda(x) \leq R(0)$ для всех $\lambda > 0$ и $x \in (-\pi, \pi]$. Далее можно рассуждать, как при доказательстве теоремы 2.3.10. Найдется последовательность $\{F_{\lambda_n}\}_{n\geq 1}$, где $\lambda_n \downarrow 0$ при $n \uparrow \infty$, сходящаяся к некоторой неубывающей, непрерывной справа функции $F\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}_+$, в каждой точке $x \in (-\pi, \pi]$ непрерывности функции F, а также в точке π. Снова, как при доказательстве теоремы 2.3.10, можно убедиться, что

$$R(t) \leftarrow R(t)H_{\lambda_n}(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{itx}\,dF_{\lambda_{k_n}}(x) \to \int_{-\pi}^{\pi} e^{itx}\,dF(x), t \in \mathbb{Z},$$

при $n \to \infty$. Равенство (2.3.13) выполняется с мерой Лебега–Стилтьеса $\mu\{A\}, A \in \mathcal{B}((-\pi, \pi])$, построенной по функции F. ◄

2.4. Нормальные распределения

Напомним определение и некоторые свойства нормального распределения. Считается, что все рассматриваемые случайные величины определены на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Пусть дана вещественная матрица $\sigma = (\sigma_{k,m}), k, m = 1, \ldots, d$. Квадратичная форма

$$u'\sigma u = \sum_{k=1}^{d} \sum_{m=1}^{d} u_k \sigma_{k,m} u_m, \; u = (u_1, \ldots, u_d) \in \mathbb{R}^d, \tag{2.4.1}$$

называется *положительно определенной*, если $u'\sigma u \geq 0$ для всех $u \in \mathbb{R}^d$. Квадратичная форма $u'\sigma u$ называется *строго положительно определенной*, если $u'\sigma u \geq 0$ для всех $u \in \mathbb{R}^d$ и $u'\sigma u = 0$ только при $u_1 = \cdots = u_d = 0$. Определитель $|\sigma|$ матрицы σ неотрицателен и $|\sigma| > 0$, если квадратичная форма строго положительно определена.

2.4.1. Определение. Случайный вектор $X = (X_1, \ldots, X_d)$ называется *нормальным,* если его характеристическая функция может быть записана в следующем виде

$$\mathbb{E}e^{i\langle X,u\rangle} = e^{i\langle \mu,u\rangle - (1/2)u'\sigma u}, u = (u_1, \ldots, u_d) \in \mathbb{R}^d. \tag{2.4.2}$$

Вектор $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_d) \in \mathbb{R}^d$ и положительно определенная матрица $\sigma = (\sigma_{k,m}), k, m = 1, \ldots, d$, называются *параметрами* нормального случайного вектора X. Нормальный случайный вектор X называется *невырожденным,* или *собственным,* если $|\sigma| > 0$.

С помощью дифференцирования можно убедиться, что

$$\mathbb{E}X_k = -i\frac{\partial}{\partial u_k}\mathbb{E}e^{i\langle X,u\rangle}\big|_{u=0} = \mu_k,$$
$$\mathbb{E}((X_k - \mathbb{E}X_k)(X_m - \mathbb{E}X_m)) = -\frac{\partial^2}{\partial u_k \partial u_m}\mathbb{E}e^{i\langle X-\mu,u\rangle}\big|_{u=0} = \sigma_{k,m}.$$

В силу этих равенств матрица σ называется *ковариационной* матрицей случайного вектора $X = (X_1, \ldots, X_d)$. По теореме 2.1.12 случайные величины $X_1, \ldots, X_d$ независимы тогда и только тогда, когда $\sigma_{k,m} = 0$ для любых $k \neq m, k, m = 1, \ldots, d$.

Пусть дан произвольный невырожденный нормальный случайный вектор $X = (X_1, \ldots, X_d)$ с параметрами μ и σ. Обозначим

$B = (b_{k,m}), k, m = 1, \ldots, d$, матрицу, обратную ковариационной матрице σ. Нетрудно проверить, что квадратичная форма

$$Q(x_1, \ldots, x_d) = \sum_{k=1}^{d} \sum_{m=1}^{d} (x_k - \mu_k) b_{k,m} (x_m - \mu_m) \tag{2.4.3}$$

переменных $x_1 - \mu_1, \ldots, x_d - \mu_d \in \mathbb{R}$ положительно определена.

2.4.2. Теорема. *Распределение невырожденного нормального случайного вектора* $X = (X_1, \ldots, X_d)$ *с параметрами* μ *и* σ *можно представить в следующем виде*

$$\mathbb{P}\{X \in A\} = \frac{1}{(2\pi|\sigma|)^{d/2}} \int_A \exp\big\{ -\frac{1}{2} Q(x) \big\} dx, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

Под интегралом понимается d*-мерный интеграл. Использованы сокращенные записи* $x = (x_1, \ldots, x_d)$ *и* $dx = dx_1 \cdots dx_d$.

► Обозначим $\nu\{A\}, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, функцию справа. Докажем, что ν является вероятностной мерой, $\nu\{\mathbb{R}^d\} = 1$, и ее преобразование Фурье совпадает с характеристической функцией случайного вектора X. В курсах по алгебре доказывается, что существует невырожденная вещественная матрица $C = (c_{k,m}), k, m = 1, \ldots, d$, такая, что $C'BC = \mathbb{1}$, где C' – матрица, транспонированная к матрице C, и $\mathbb{1}$ – единичная матрица. Условимся точку $x = (x_1, \ldots, x_d)$ считать вектор-столбцом. Транспонирование переводит этот вектор-столбец в вектор-строку x'. Квадратичную форму (2.4.3) можно записать в следующем виде $Q(x) = (x - \mu)' B (x - \mu)$. Преобразуем вектор-столбец $x - \mu$ в вектор-столбец $y = C^{-1}(x - \mu)$, где C^{-1} – матрица, обратная к матрице C. Замена переменных $x - \mu = Cy$ преобразует Q к сумме квадратов новых переменных

$$(Cy)' B (Cy) = y'(C'BC) y = y' \mathbb{1} y = \sum_{k=1}^{d} y_k^2.$$

С помощью замены переменных $x - \mu = Cy$ нетрудно доказать, что

$$\nu\{\mathbb{R}^d\} = \frac{1}{(2\pi|\sigma|)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-Q(x)/2}\, dx = \prod_{k=1}^{d} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_k^2/2}\, dx_k = 1.$$

С помощью той же самой замены переменных можно убедиться, что

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle u, x\rangle}\, d\nu = \frac{1}{(2\pi|\sigma|)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left\{ i\langle u, x\rangle - \frac{1}{2} Q(x) \right\} dx =$$
$$= e^{i\langle u, \mu\rangle - (1/2) u' \sigma u}. \quad ◄$$

2.4.3. Определение. Случайная величина $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ называется *нормальной,* если ее характеристическая функция может быть записана в следующем виде

$$\mathbb{E}e^{iuX} = e^{i\mu u - \sigma^2 u^2/2}, u \in \mathbb{R}, \sigma \geq 0. \tag{2.4.4}$$

Числа $\mu \in \mathbb{R}$ и $\sigma^2 \geq 0$ называются *параметрами* случайной величины X. Нормальная случайная величина называется *невырожденной,* или *собственной,* если $\sigma > 0$.

Из (2.4.4) следует, что $\mu = \mathbb{E}X$ и $\sigma^2 = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2$. Сформулируем частный случай теоремы 2.4.2.

2.4.4. Теорема. *Распределение собственной нормальной случайной величины* $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *с параметрами* $\mu \in \mathbb{R}$ *и* $\sigma^2 > 0$ *можно представить в следующем виде*

$$\mathbb{P}\{X \in A\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_A e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} dx, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Обратим внимание, что символы μ и σ обозначают число (вектор) и число (матрицу). Из контекста ясно, идет речь о случайной величине или о случайном векторе.

Сформулируем одно простое, но важное утверждение, которое непосредственно вытекает из определения 2.4.1.

2.4.5. Замечание. *Случайный вектор* $(X_1, \ldots, X_d)\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$ *является нормальным тогда и только тогда, когда любая линейная комбинация* $\sum_{k=1}^d u_k X_k$ *с коэффициентами* $u_1, \ldots, u_d \in \mathbb{R}$ *является нормальной случайной величиной.*

Для доказательства существования процесса броуновского движения нам понадобятся неравенства Гордона (R. D. Gordon). Из их формулировки (2.4.5) можно вывести границы для отношения $\int_x^\infty e^{-u^2/2}\, du / e^{-x^2/2}$, известного под названием отношения Миллса (John P. Mills). Неравенства, подобные неравенству Гордона, получили названия неравенств для отношения Миллса.

2.4.6. Теорема. *Для любого* $x > 0$ *справедливы неравенства*

$$\frac{x}{1+x^2} e^{-x^2/2} < \int_x^\infty e^{-u^2/2}\, du < \frac{1}{x} e^{-x^2/2}. \tag{2.4.5}$$

► Интегрирование по частям приводит к равенству

$$\int_x^\infty \frac{1}{u^2} e^{-u^2/2}\, du = \frac{1}{x} e^{-x^2/2} - \int_x^\infty e^{-u^2/2}\, du.$$

Разность справа положительна, что влечет правое неравенство в (2.4.5). Из предыдущего равенства следует, что

$$\frac{1}{x}e^{-x^2/2} = \int_x^\infty (1+\frac{1}{u^2})e^{-u^2/2}\,du < (1+\frac{1}{x^2})\int_x^\infty e^{-u^2/2}\,du.$$

Отсюда следует левое неравенство в (2.4.5). ◀

2.4.7. Теорема. *Пусть вещественные случайные величины* X_n, $n \in \mathbb{N}$, *определенные на вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, *имеют общую стандартную нормальную функцию распределения*

$$\mathbb{P}\{X_n < x\} = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^x e^{-u^2/2}du, \;\; x \in \mathbb{R}.$$

Тогда $\mathbb{P}\{\cap_{n=1}^\infty \cup_{k=n}^\infty \{|X_k| > c\sqrt{\ln k}\}\} = 0$ *для любого* $c > \sqrt{2}$.

▶ В силу правого неравенства (2.4.5) справедлива оценка

$$\mathbb{P}\{|X_n| > c\sqrt{\ln n}\} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{c\sqrt{\ln n}}^\infty e^{-u^2/2}\,du < \frac{2}{c\sqrt{2\pi\ln n}}e^{-c^2\ln n/2}$$

для $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Отсюда следует, что

$$\sum_{n=2}^\infty \mathbb{P}\left\{|X_n| > c\sqrt{\ln n}\right\} \leq \sum_{n=2}^\infty \frac{2}{c\sqrt{2\pi\ln n}\, n^{c^2/2}} < \infty.$$

Утверждение выполняется по теореме 1.5.16 с $\mu = \mathbb{P}$. ◀

2.5. Условные математические ожидания

Понятие условного математического ожидание было введено в употребление А. Н. Колмогоровым в его монографии [14]. Оно будет играть основную роль при изучении теории мартингалов. Здесь будут изложены основные свойства условных математических ожиданий, необходимые для изучения свойств случайных процессов. Полное изложение теории условных математических ожиданий сильно увеличило бы объем этой главы. Заинтересованный читатель может познакомиться с другими свойствами условных математических ожиданий по учебникам [5], [8], [16], [17]. Предполагается, что все измеримые функции, о которых пойдет речь, определены на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

2.5.1. Определение. *Условным математическим ожиданием* измеримой функции $X\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ относительно сигма-алгебры $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ называется $\mathcal{G}$-измеримая функция $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ такая, что для любого $A \in \mathcal{G}$ выполняется равенство

$$\int_A X d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}(X|\mathcal{G}) d\mathbb{P}. \tag{2.5.1}$$

Ниже встретятся утверждения, касающиеся элементарных событий, которые выполняются почти всюду по отношению к вероятности $\mathbb{P}_{\mathcal{G}}\{A\} = \mathbb{P}\{A\}, A \in \mathcal{G}$. Ради сокращения записи часто пишут, что такие утверждения выполняются п.в., опуская упоминание о $\mathbb{P}_{\mathcal{G}}$. Например, $\mathcal{G}$-измеримые функции $f, g\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ равны п.в. Здесь «забыли» написать $\mathbb{P}_{\mathcal{G}}$-почти всюду. Утверждение состоит в том, что $\{f = g\} \in \mathcal{G}$ и $\mathbb{P}_{\mathcal{G}}\{f = g\} = \mathbb{P}\{f = g\} = 1$.

2.5.2. Теорема. *Если существует математическое ожидание измеримой функции $X\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, то существует условное математическое ожидание $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ относительно любой сигма-алгебры $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. Любые две версии условного математического ожидания $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ совпадают $\mathbb{P}_{\mathcal{G}}$-п.в.*

► По теореме 1.6.14 функция $\mu\{A\} = \int_A X d\mathbb{P}, A \in \mathcal{G}$, является счетно-конечным зарядом. Заряд μ абсолютно непрерывен относительно вероятности $\mathbb{P}_{\mathcal{G}}$. По теореме 1.8.5 существует $\mathcal{G}$-измеримая функция $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ со свойством (2.5.1). По теореме 1.6.15 любые две $\mathcal{G}$-измеримые функции со свойством (2.5.1) равны п.в., подробнее, они равны $\mathbb{P}_{\mathcal{G}}$-почти всюду. ◄

Условное математическое ожидание относительно сигма-алгебр, порожденных разбиениями, можно определить конструктивно. Напомним, что попарно несовместные события $A_n \in \mathcal{F}, n \in \mathbb{N}$, образуют разбиение множества Ω, если $\Omega = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$.

2.5.3. Теорема. *Пусть сигма-алгебра $\mathcal{G}$ порождена разбиением $A_n \in \mathcal{F}, n \in \mathbb{N}$, множества Ω. Если математическое ожидание измеримой функции $X\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ существует, то*

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}(X\mathbb{1}_{A_n})}{\mathbb{P}\{A_n\}} \mathbb{1}_{A_n}, \tag{2.5.2}$$

где $\mathbb{E}(X\mathbb{1}_{A_n})/\mathbb{P}\{A_n\} = 0$ по определению, если $\mathbb{P}\{A_n\} = 0$.

► Непосредственно видно, что функция $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима относительно сигма-алгебры $\mathcal{G}$. Проверим условие (2.5.1). По теореме 1.6.14 функция $\int_A \mathbb{E}(X|\mathcal{G})d\mathbb{P}, A \in \mathcal{G}$, является зарядом. Каждое множество $A \in \mathcal{G}$ представляет собой объединение конечного или счетного числа множеств из числа $A_n, n \in \mathbb{N}$. Пусть, например, $A = \cup_{m=1}^{\infty} A_{k_m}$. Так как $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\mathbb{1}_{A_n} = (\mathbb{E}(X\mathbb{1}_{A_n})/\mathbb{P}\{A_n\})\mathbb{1}_{A_n}$ п.в., то

$$\int_A \mathbb{E}(X|\mathcal{G})\, d\mathbb{P} = \sum_{m=1}^{\infty} \int_{A_{k_m}} \mathbb{E}(X|\mathcal{G})\, d\mathbb{P} = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{E}(X\mathbb{1}_{A_{k_m}}) = \int_A X\, d\mathbb{P}. \blacktriangleleft$$

В следующей теореме перечислены некоторые свойства условных математических ожиданий.

2.5.4. Теорема. *Пусть даны произвольные* σ*-алгебры* $\mathcal{G}, \mathcal{G}' \subseteq \mathcal{F}$ *и расширенные случайные величины* $X, Y : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, *математические ожидания которых существуют.*
(i) *Если* $X \geq 0$ *п.в., то* $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \geq 0$ *п.в.*
(ii) *Если* $X = c$ *п.в. для некоторого* $c \in \mathbb{R}$, *то* $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = c$ *п.в.*
(iii) $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})) = \mathbb{E}X$.
(iv) *Если* $\mathcal{G} = \{\Omega, \varnothing\}$, *то* $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}X$ *п.в.*
(v) *Если* $\mathbb{E}|X| < \infty$, *то* $|\mathbb{E}(X|\mathcal{G})| < \infty$ *п.в.*
(vi) $\mathbb{E}(cX|\mathcal{G}) = c\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ *п.в. для любого* $c \in \mathbb{R}$.
(vii) $|\mathbb{E}(X|\mathcal{G})| \leq \mathbb{E}(|X||\mathcal{G})$ *п.в.*
(viii) *Если* X *измерима относительно* $\mathcal{G}$, *то* $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = X$ *п.в.*
(ix) *Если* $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}'$, *то* $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})|\mathcal{G}') = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G}')|\mathcal{G})$ *п.в.*
(x) *Если* X *и* $\mathcal{G}$ *независимы, то* $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}X$ *п.в.*
(xi) *Если* $X = Y$ *п.в., то* $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$ *п.в.*
(xii) *Если* $X \leq Y$ *п.в., то* $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \leq \mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$ *п.в.*
(xiii) *Если суммы* $X + Y$ *и* $\mathbb{E}X + \mathbb{E}Y$ *корректно определены, то существует* $\mathbb{E}(X + Y|\mathcal{G})$ *и* $\mathbb{E}(X + Y|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{G}) + \mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$ *п.в.*

► (i). Если $X \geq 0$, то функция $\mu\{A\} = \int_A X\, d\mathbb{P}, A \in \mathcal{G}$, является мерой и, следовательно, $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \geq 0$ п.в. по теореме 1.8.5.

(ii). Функция, тождественно равная постоянной c, $\mathcal{G}$-измерима. Равенство $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = c$ п.в. выполняется по теореме 1.6.15, так как $\int_A \mathbb{E}(X|\mathcal{G})\, d\mathbb{P} = \int_A X\, d\mathbb{P} = \int_A c\, d\mathbb{P}$ для любого $A \in \mathcal{G}$.

(iii), (iv). Утверждения непосредственно следуют из определения условного математического ожидания.

(v). Если $\mathbb{E}|X| < \infty$, то $\int_\Omega |\mathbb{E}(X|\mathcal{G})|\, dP < \infty$ по теореме Радона–Никодима. По теореме 1.6.7 функция $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ п.в. конечна.

(vi). Утверждение следует из определения условного математического ожидания и из линейного свойства интегралов.

(vii). Утверждение следует из 2.5.1 и неравенств $\pm X \leq |X|$,

$$\int_A \mathbb{E}(\pm X|\mathcal{G})\,d\mathbb{P} = \int_A (\pm X)\,d\mathbb{P} \leq \int_A |X|\,d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}(|X||\mathcal{G})\,d\mathbb{P}, A \in \mathcal{G}.$$

По теореме 1.6.15 выполняется неравенство $\pm\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \leq \mathbb{E}(|X||\mathcal{G})$ п.в. и, следовательно, $|\mathbb{E}(X|\mathcal{G})| \leq \mathbb{E}(|X||\mathcal{G})$ п.в.

(viii). Функции X и $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ измеримы относительно $\mathcal{G}$. Так как $\int_A \mathbb{E}(X|\mathcal{G})\,d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P}, A \in \mathcal{G}$, то $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = X$ п.в. по теореме 1.6.15.

(ix). Первое равенство выполняется в силу утверждения (viii). Далее, для любого $A \in \mathcal{G}$ выполняются равенства

$$\int_A \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G}')|\mathcal{G})\,d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}(X|\mathcal{G}')\,d\mathbb{P} = \int_A X\,d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}(X|\mathcal{G})\,d\mathbb{P}.$$

Равенство $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G}')|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ п.в. выполняется по теореме 1.6.15.

(x). Так как X и $\mathcal{G}$ независимы, то $\mathbb{E}(X\mathbb{1}_A) = \mathbb{E}X\mathbb{P}\{A\}$ для любого $A \in \mathcal{G}$ и, следовательно, $\int_A \mathbb{E}(X|\mathcal{G})\,d\mathbb{P} = \int_A X\,d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}X\,d\mathbb{P}$. Функция, равная постоянной $\mathbb{E}X$, измерима относительно $\mathcal{G}$. По теореме 1.6.15 выполняется равенство $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}X$ п.в.

(xi). По теореме 1.6.8 выполняется равенство $\int_A X d\mathbb{P} = \int_A Y d\mathbb{P}$ для любого $A \in \mathcal{G}$, и, следовательно, $\int_A \mathbb{E}(X|\mathcal{G})\,d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}(Y|\mathcal{G})\,d\mathbb{P}$. Равенство $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$ п.в. выполняется по теореме 1.6.15.

(xii). Если $X \leq Y$ п.в., то

$$\int_A \mathbb{E}(X|\mathcal{G})\,d\mathbb{P} = \int_A X\,d\mathbb{P} \leq \int_A Y\,d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}(Y|\mathcal{G})\,d\mathbb{P}, A \in \mathcal{G}.$$

По теореме 1.6.15 выполняется неравенство $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \leq \mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$ п.в.

(xiii). По теореме 1.6.5 существует $\mathbb{E}(X+Y)$ и выполняется равенство $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y$. По теореме 2.5.2 существует условное математическое ожидание $\mathbb{E}(X+Y|\mathcal{G})$ и выполняются равенства

$$\int_A \mathbb{E}(X+Y|\mathcal{G})\,d\mathbb{P} = \int_A (X+Y)\,d\mathbb{P} =$$
$$= \int_A X\,d\mathbb{P} + \int_A Y\,d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}(X|\mathcal{G})\,d\mathbb{P} + \int_A \mathbb{E}(Y|\mathcal{G})\,d\mathbb{P}, A \in \mathcal{G}.$$

Тем самым доказано, то сумма $\int_A \mathbb{E}(X|\mathcal{G})\,d\mathbb{P} + \int_A \mathbb{E}(Y|\mathcal{G})\,d\mathbb{P}$ корректно определена. По теореме 1.6.5 выполняется равенство

$$\int_A (\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) + \mathbb{E}(Y|\mathcal{G}))\,d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}(X|\mathcal{G})\,d\mathbb{P} + \int_A \mathbb{E}(Y|\mathcal{G})\,d\mathbb{P}$$

и, следовательно,

$$\int_A \mathbb{E}(X+Y|\mathcal{G})\,d\mathbb{P} = \int_A (\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) + \mathbb{E}(Y|\mathcal{G}))\,d\mathbb{P}.$$

Требуемое равенство $\mathbb{E}(X+Y|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{G})+\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$ п.в. выполняется по теореме 1.6.15. ◀

2.5.5. Замечание. *Для любой сигма-алгебры $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ и для любой расширенной случайной величины $X\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, для которой существует математическое ожидание, выполняются неравенства*

$$(\mathbb{E}(X|\mathcal{G}))^+ \le \mathbb{E}(X^+|\mathcal{G}), (\mathbb{E}(X|\mathcal{G}))^- \le \mathbb{E}(X^-|\mathcal{G}) \text{ п.в.} \tag{2.5.3}$$

▶ Неравенства являются непосредственными следствиями теоремы 2.5.4 и неравенств $X \le X^+$ и $-X \le X^-$. ◀

Нам представится много случаев убедиться в полезности следующего неравенства Иенсена (Johan Jensen).

2.5.6. Теорема. *Пусть даны σ-алгебра $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, выпуклая функция $g\colon (a,b) \to \mathbb{R}, (a,b) \subset \overline{\mathbb{R}}$, случайная величина $X\colon \Omega \to (a,b)$. Если $\mathbb{E}|X| < \infty$, то $\mathbb{E}g^-(X) < \infty, a < \mathbb{E}(X|\mathcal{G}) < b$ п.в. и выполняется неравенство Иенсена $g(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})) \le \mathbb{E}(g(X)|\mathcal{G})$ п.в.*

▶ Утверждение, что $\mathbb{E}g^-(X) < \infty$ было доказано в теореме 2.1.9. По теореме 2.5.4 выполняется неравенство $|\mathbb{E}(X|\mathcal{G})| < \infty$ п.в. Если $b < \infty$, то $b - X > 0$ и $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \le b$ п.в. по теореме 2.5.4. Из соотношений

$$0 \le \int_{\{\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \ge b\}} (\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) - b)\,d\mathbb{P} = \int_{\{\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \ge b\}} (X - b)\,d\mathbb{P} \le 0$$

следует, что $\mathbb{P}\{\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \ge b\} = 0$ и $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) < b$ п.в. Это неравенство также выполняется для $b = \infty$. Аналогично можно доказать неравенство $a < \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ п.в. Далее, по теореме 1.10.3 выполняется равенство $g(X) = \sup_{n\ge1}(a_nX+b_n)$ для некоторых чисел $a_n, b_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. Отсюда следует неравенство $\mathbb{E}(g(X)|\mathcal{G}) \ge a_n\mathbb{E}(X|\mathcal{G})+b_n$ п.в. для любого $n \in \mathbb{N}$. Применение теоремы 1.10.3 ведет к требуемому неравенству $\mathbb{E}(g(X)|\mathcal{G}) \ge \sup_{n\ge1}(a_n\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) + b_n) = g(\mathbb{E}(X|\mathcal{G}))$ п.в. ◀

2.5.7. Теорема. *Пусть даны сигма-алгебра $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ и измеримые функции $X, X_n\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}, n \in \mathbb{N}$, такие, что все математические ожидания $\mathbb{E}X_n, n \in \mathbb{N}$, существуют.*

(i) *Если $X_n \uparrow X$ п.в. и $\mathbb{E}(\inf_{n\ge1} X_n) > -\infty$ или если $X_n \downarrow X$ п.в. и $\mathbb{E}(\sup_{n\ge1} X_n) < \infty$, то $\mathbb{E}X$ существует и*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \text{ п.в.}$$

(ii) *Если* $\mathbb{E}(\inf_{n\geq 1} X_n) > -\infty$, *то*

$$\mathbb{E}(\liminf_{n\to\infty} X_n|\mathcal{G}) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n|\mathcal{G}) \text{ п.в.}$$

(iii) *Если* $\mathbb{E}(\sup_{n\geq 1} X_n) < \infty$, *то*

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n|\mathcal{G}) \leq \mathbb{E}(\limsup_{n\to\infty} X_n|\mathcal{G}) \text{ п.в.}$$

(iv) *Если* $\mathbb{E}(\sup_{n\geq 1}|X_n|) < \infty, \lim_{n\to\infty} X_n = X$ *п.в., то*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \text{ п.в.}, \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}|\mathbb{E}(X_n|\mathcal{G}) - \mathbb{E}(X|\mathcal{G})| = 0.$$

(v) *Если* $\mathbb{E}|X| < \infty, \mathbb{E}|X_n| < \infty, n \in \mathbb{N}, \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}|X_n - X| = 0$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}|\mathbb{E}(X_n|\mathcal{G}) - \mathbb{E}(X|\mathcal{G})| = 0, \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_{m_n}|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \text{ п.в.}$$

для некоторой последовательности $\{m_n\}_{n\geq 1}$ *индексов.*
(vi) *Если* $X_n \geq 0$ *п.в. для всех* $n \in \mathbb{N}$, *то*

$$\mathbb{E}(\sum_{n=1}^{\infty} X_n|\mathcal{G}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(X_n|\mathcal{G}) \text{ п.в.}$$

► (i). Обозначим $h = \inf_{n\geq 1} X_n$. Предположим, что $X_n \uparrow X$ и $\int_\Omega h\,d\mathbb{P} > -\infty$. Математическое ожидание $\mathbb{E}X$ существует, так как $h \leq X$, и, следовательно, $X^- \leq h^-$ и $\mathbb{E}X^- \leq \mathbb{E}h^- < \infty$. Обозначим множество $B \subseteq \Omega$, на котором выполняются неравенства $\mathbb{E}(h|\mathcal{G}) \leq \mathbb{E}(X_n|\mathcal{G}) \leq E(X_{n+1}|\mathcal{G}) \leq \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Множество B принадлежит сигма-алгебре $\mathcal{G}$ и имеет единичную вероятность. Возрастающая последовательность $\{\mathbb{1}_B\mathbb{E}(X_n|\mathcal{G})\}_{n\geq 1}$ поточечно сходится к некоторой $\mathcal{G}$-измеримой функции $Y\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$. Так как $\mathbb{E}(h|\mathcal{G}) \leq Y$ п.в., то $-\infty < \mathbb{E}Y$. Пусть $A \in \mathcal{G}$. По теореме 1.6.9 применительно к $\{X_n\}_{n\geq 1}$ и $\{\mathbb{1}_{A\cap B}\mathbb{E}(X_n|\mathcal{G})\}_{n\geq 1}$ справедливы следующие соотношения

$$\int_A Y\,d\mathbb{P} \leftarrow \int_A \mathbb{E}(X_n|\mathcal{G})\,d\mathbb{P} = \int_A X_n\,d\mathbb{P} \to \int_A X\,d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}(X|\mathcal{G})\,d\mathbb{P}$$

при $n \to \infty$. Равенство первого и последнего интегралов влечет равенство $Y = \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ п.в. по теореме 1.6.15. Так как $B \in \mathcal{G}, \mathbb{P}\{B\} = 1$ и $\lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_B\mathbb{E}(X_n|\mathcal{G}) = Y$, то $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ п.в. Аналогично можно доказать, что $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ п.в., если выполняются условия $X_n \downarrow X$ и $\mathbb{E}(\sup_{n\geq 1} X_n) < \infty$.

(ii). Так как $Y_n = \inf_{k\geq n} X_k \uparrow X = \liminf_{n\to\infty} X_n$ и $\mathbb{E}Y_1 > -\infty$, то (см. доказательство (i)) выполняются следующие соотношения

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(Y_n|\mathcal{G}) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n|\mathcal{G}) \text{ п.в.}$$

(iii). Так как $Z_n = \sup_{k\geq n} X_k \downarrow Z = \limsup_{n\to\infty} X_n$ и $\mathbb{E}Z_1 < \infty$, то (см. доказательство (i)) выполняются следующие соотношения

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n|\mathcal{G}) \leq \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(Z_n|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(Z|\mathcal{G}) \text{ п.в.}$$

(iv). Заметим, что $\mathbb{E}|X| < \infty$. В силу теорем 1.6.18 и 2.5.4 справедливы следующие соотношения

$$\mathbb{E}|\mathbb{E}(X_n|\mathcal{G}) - \mathbb{E}(X|\mathcal{G})| \leq \mathbb{E}|X_n - X| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Утверждение $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ п.в. следует из (ii) и (iii), так как $\liminf_{n\to\infty} X_n = X = \limsup_{n\to\infty} X_n$ п.в.

(v). Из условия $\mathbb{E}|X_n - X| \to 0$ и теоремы 2.5.4 следует, что

$$\mathbb{E}|\mathbb{E}(X_n|\mathcal{G}) - \mathbb{E}(X|\mathcal{G})| = \mathbb{E}|\mathbb{E}(X_n - X|\mathcal{G})| \leq$$
$$\leq \mathbb{E}\mathbb{E}(|X_n - X||\mathcal{G}) = \mathbb{E}|X_n - X| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Отсюда следует (применить неравенство Чебышева), что последовательность $\{\mathbb{E}(X_n|\mathcal{G})\}_{n\geq 1}$ сходится по вероятности к $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$. Требуемая последовательность $\{m_n\}_{n\geq 1}$ существует по теореме 1.5.14.

(vi). Утверждение следует из (i) и теоремы 2.5.4. Действительно, $Y_n = \sum_{k=1}^n X_k \uparrow \sum_{k=1}^\infty X_k = Y$ при $n \to \infty$ и

$$\sum_{k=1}^\infty \mathbb{E}(X_k|\mathcal{G}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k|\mathcal{G}) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(Y_n|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(Y|\mathcal{G}) \text{ п.в.} \quad \blacktriangleleft$$

2.5.8. Теорема. *Пусть даны измеримые функции* $X, Y : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *и сигма-алгебра* $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. *Если* Y *измерима относительно* $\mathcal{G}$ *и существуют математические ожидания* $\mathbb{E}X$ и $\mathbb{E}(XY)$, *то*

$$\mathbb{E}(XY|\mathcal{G}) = Y\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \text{ п.в.} \tag{2.5.4}$$

► Доказательство будет проведено в два этапа.

(i). Предположим, что $X \geq 0$ и $Y = \mathbb{1}_B, B \in \mathcal{G}$. Из равенств $\mathbb{E}(Y\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(YX|\mathcal{G})\mathbb{1}_A)$ для любого $A \in \mathcal{G}$ следует равенство (2.5.4) по теореме 1.6.15. По теореме 2.5.4 равенство

(2.5.4) выполняется для любой неотрицательной, $\mathcal{G}$-простой функции $Y = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathbb{1}_{B_k}, B_k \in \mathcal{G}, c_k \in \mathbb{R}_+, k = 1, \ldots, n$. Далее, по теореме 1.5.9 для любой неотрицательной, $\mathcal{G}$-измеримой функции Y найдутся неотрицательные, $\mathcal{G}$-измеримые простые функции $Y_n, n \in \mathbb{N}$, такие, что $Y_n \uparrow Y$ при $n \uparrow \infty$. Равенство (2.5.4) выполняется для $Y = Y_n$. Заметим, что $\mathbb{E}(\inf_{n\geq 1} Y_n X) \geq 0$ и $Y_n X \uparrow YX$ при $n \uparrow \infty$. По теореме 2.5.7 выполняются следующие соотношения

$$Y\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \lim_{n\to\infty} Y_n \mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(XY_n|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(XY|\mathcal{G}) \text{ п.в.}$$

(ii). Пусть X и Y удовлетворяют условиям теоремы. По условию существует $\mathbb{E}(XY)$ и, следовательно, одна из величин $\mathbb{E}(XY)^{\pm}$ конечна, например, $\mathbb{E}(XY)^{+} < \infty$. Запишем произведение XY в следующем виде $XY = (XY)^{+} - (XY)^{-}$, где $(XY)^{+} = X^{+}Y^{+} + X^{-}Y^{-}$ и $(XY)^{-} = X^{-}Y^{+} + X^{+}Y^{-}$. По теореме 2.5.4 и по доказанному в (i) выполняются следующие равенства

$$\mathbb{E}(XY|\mathcal{G}) = \mathbb{E}((XY)^{+}|\mathcal{G}) - \mathbb{E}((XY)^{-}|\mathcal{G}) \text{ п.в.,} \tag{2.5.5}$$

$$\mathbb{E}((XY)^{+}|\mathcal{G}) = Y^{+}\mathbb{E}(X^{+}|\mathcal{G}) + Y^{-}\mathbb{E}(X^{-}|\mathcal{G}) \text{ п.в.,} \tag{2.5.6}$$

$$\mathbb{E}((XY)^{-}|\mathcal{G}) = Y^{-}\mathbb{E}(X^{+}|\mathcal{G}) + Y^{+}\mathbb{E}(X^{-}|\mathcal{G}) \text{ п.в.} \tag{2.5.7}$$

По теореме 2.5.4 функция $\mathbb{E}((XY)^{+}|\mathcal{G})$ конечна п.в. Поэтому слагаемые в сумме (2.5.6) конечны. В частности, должно выполняться равенство $Y^{-} = 0$, если $\mathbb{E}(X^{-}|\mathcal{G}) = \infty$. Вычтем (2.5.7) из (2.5.6) и заметим, что можно группировать слагаемые, относящиеся к $\mathbb{E}(X^{+}|\mathcal{G})$ и $\mathbb{E}(X^{-}|\mathcal{G})$. Такая группировка слагаемых не приводит к неопределенностям. В результате с учетом (2.5.5) получится требуемое равенство (2.5.4). ◄

Глава 3
Свойства случайных процессов

В этой главе дается общее представление о понятии случайного процесса и обсуждаются свойства, которыми могут обладать случайные процессы.

3.1. Понятие случайного процесса

После определения случайного процесса возникает естественный вопрос о его существовании. Ответ содержится в данном параграфе. Предполагается, что все случайные векторы, о которых пойдет речь, определены на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

3.1.1. Определение. Произвольное семейство случайных векторов $X_t \colon \Omega \to \mathbb{R}^d, t \in T$, называется *случайным процессом.*

Пусть дан случайный процесс $X = \{X_t, t \in T\}$ с параметрическим множеством T. Для любых различных $t_1, \ldots, t_n \in T$ мера $\mathbb{P}_{t_1,\ldots,t_n}\{A\} = \mathbb{P}\{(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \in A\}$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{dn})$, называется *конечномерным распределением* случайного процесса X. Семейство всех конечномерных распределений является основной характеристикой случайного процесса. Если множество T конечно, скажем, $T = \{t_1, \ldots, t_n\}$, то случайный процесс является случайным вектором $X = (X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ с распределением $P_{t_1,\ldots,t_n}$.

3.1.2. Теорема. *Конечномерные распределения случайного процесса* $X=\{X_t, t \in T\}$ *удовлетворяют условиям согласованности*

$$\mathbb{P}_{t_1,\ldots,t_n}\{\times_{k=1}^n A_k\} = \mathbb{P}_{t_{\pi(1)},\ldots,t_{\pi(n)}}\{\times_{k=1}^n A_{\pi(k)}\}, \tag{3.1.1}$$

$$\mathbb{P}_{t_1,\ldots,t_{n+1}}\{\times_{k=1}^n A_k \times \mathbb{R}^d\} = \mathbb{P}_{t_1,\ldots,t_n}\{\times_{k=1}^n A_k\} \tag{3.1.2}$$

для любых чисел $n \in \mathbb{N}, t_1, \ldots, t_{n+1} \in T$, *для любых множеств* $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, *для любой перестановки* π *чисел* $1, \ldots, n$.

► Условия согласованности являются следствием равенств

$$\mathbb{P}\{X_{t_k} \in A_k, k = 1, \dots, n\} = \mathbb{P}\{X_{t_{\pi(k)}} \in A_{\pi(k)}, k = 1, \dots, n\},$$
$$\mathbb{P}\{\cap_{k=1}^n \{X_{t_k} \in A_k\} \cap \{X_{t_{n+1}} \in \mathbb{R}^d\}\} = \mathbb{P}\{\cap_{k=1}^n \{X_{t_k} \in A_k\}\}.$$

Здесь принято во внимание, что $\{X_{t_{n+1}} \in \mathbb{R}^d\} = \Omega$. ◄

Следующая теорема, принадлежащая Колмогорову (Андрей Николаевич Колмогоров), позволяет строить случайные процессы с заданными конечномерными распределениями. Пусть дано произвольное множество $T \subseteq \mathbb{R}$. Обозначим $(\mathbb{R}^d)^T$ и $\mathcal{B}((\mathbb{R}^d)^T)$ множество функций $\omega\colon T \to \mathbb{R}^d$ и σ-алгебру, порожденную алгеброй $\mathcal{A}$ всех цилиндрических множеств с конечномерными основаниями.

3.1.3. Теорема. *Если семейство вероятностей* $\mathbb{P}_{t_1,\dots,t_n}\{A\}$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{dn}), t_1, \dots, t_n \in T, n \in \mathbb{N}$, *удовлетворяет условиям* (3.1.1) *и* (3.1.2), *то существуют вероятность* $\mathbb{P}^T\colon \mathcal{B}((\mathbb{R}^d)^T) \to [0, 1]$ *и случайный процесс* $X = \{X_t, t \in T\}$, *определенный на вероятностном пространстве* $((\mathbb{R}^d)^T, \mathcal{B}((\mathbb{R}^d)^T), \mathbb{P}^T)$, *такие, что*

$$\mathbb{P}^T\{(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in A\} = \mathbb{P}_{t_1,\dots,t_n}\{A\}$$

для любых $n \in \mathbb{N}, t_1, \dots, t_n \in T, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{dn})$.

► Предполагается, что множество T бесконечно. Доказательство годится также для конечного множества T с существенными упрощениями. Цилиндрическое множество $C_U(A) \in \mathcal{A}$ определяется конечным множеством $U = \{t_1 \dots, t_n\} \subset T$ и основанием $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{dn})$. Определим функцию $\mu\{C_U(A)\} = \mathbb{P}_{t_1,\dots,t_n}\{A\}$ на алгебре $\mathcal{A}$ цилиндрических множеств с конечномерными основаниями.

(i). Убедимся, что функция μ определена корректно. Требуется доказать равенство $\mu\{C_U(A)\} = \mu\{C_V(B)\}$, если $C_U(A) = C_V(B)$, где $V = \{t'_1, \dots, t'_m\} \subset T$ и $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{dm})$. Определим отображения $\pi_1\colon \mathbb{R}^{dr} \to \mathbb{R}^{dn}$ и $\pi_2\colon \mathbb{R}^{dr} \to \mathbb{R}^{dm}$, которые переводят произвольную функцию $\omega_t, t \in U \cup V = \{u_1, \dots, u_r\}$, в ее сужения на множества U и V. При доказательстве теоремы 1.2.16 было установлено, что $C_{U\cup V}(\pi_1^{-1}(A)) = C_U(A) = C_V(B) = C_{U\cup V}(\pi_2^{-1}(B))$ и $\pi_1^{-1}(A) = \pi_2^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{dr})$. Из условий (3.1.1) и (3.1.2) следует, что

$$\mu\{C_{U\cup V}(\pi_1^{-1}(A))\} = \mathbb{P}_{u_1,\dots,u_r}\{\pi_1^{-1}(A)\} =$$
$$= \mathbb{P}_{u_1,\dots,u_r}\{\pi_2^{-1}(B)\} = \mu\{C_{U\cup V}(\pi_2^{-1}(B))\}.$$

Убедимся, что справедливы равенства

$$\mu\{C_U(A)\} = \mu\{C_{U\cup V}(\pi_1^{-1}(A))\}, \mu\{C_{U\cup V}(\pi_2^{-1}(B))\} = \mu\{C_V(B)\}.$$

Доказательство обоих равенств одинаково. Докажем первое из них. Обозначим $\mathcal{L} = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{dn})\colon \mu\{C_U(A)\} = \mu\{C_{U\cup V}(\pi_1^{-1}(A))\}\}$. Достаточно доказать равенство $\mathcal{L} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{dn})$. Нетрудно проверить, что $\mathcal{L}$ является λ-классом. Ниже будет доказано, что класс $\mathcal{L}$ содержит все измеримые прямоугольники. Требуемое равенство $\mathcal{L} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{dn})$ выполняется по теореме 1.2.7. Докажем, что класс $\mathcal{L}$ содержит любой прямоугольник $\times_{t\in U} A_t \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Действительно, его прообраз $\pi_1^{-1}(\times_{t\in U} A_t)$ является прямоугольником $\times_{u\in U\cup V} B_u$ со сторонами $B_u = \mathbb{R}^d$, если $u \notin \{t_1, \ldots t_n\}$, и $B_u = A_u$, если $u \in \{t_1, \ldots, t_n\}$. В силу согласованности вероятностей выполняются равенства

$$\begin{aligned}\mu\{C_U(\times_{t\in U} A_t)\} &= \mathbb{P}_{t_1,\ldots,t_n}\{\times_{t\in U} A_t\} = \mathbb{P}_{u_1,\ldots,u_r}\{\times_{u\in U\cup V} B_u\} = \\ &= \mu\{C_{U\cup V}(\times_{u\in U\cup V} B_u)\} = \mu\{C_{U\cup V}(\pi_1^{-1}(\times_{t\in U} A_t))\}.\end{aligned}$$

(ii). Докажем, что функция μ конечно аддитивна. Это свойство достаточно проверить для двух множеств. Если $C_U(A), C_V(B) \in \mathcal{A}$ и $C_U(A) \cap C_V(B) = \varnothing$, то $\pi_1^{-1}(A) \cap \pi_2^{-1}(B) = \varnothing$ и

$$\begin{aligned}\mu\{C_U(A) \cup C_V(B)\} &= \mu\{C_{U\cup V}(\pi_1^{-1}(A) \cup \pi_2^{-1}(B))\} = \\ &= \mathbb{P}_{u_1,\ldots,u_r}\{\pi_1^{-1}(A) \cup \pi_2^{-1}(B)\} = \\ &= \mathbb{P}_{u_1,\ldots,u_r}\{\pi_1^{-1}(A)\} + P_{u_1,\ldots,u_r}\{\pi_2^{-1}(B)\} = \\ &= \mu\{C_{U\cup V}(\pi_1^{-1}(A))\} + \mu\{C_{U\cup V}(\pi_2^{-1}(B))\} = \mu\{C_U(A)\} + \mu\{C_V(B)\}.\end{aligned}$$

(iii). Докажем, что функция μ счетно аддитивна. В силу теоремы 1.4.4 достаточно проверить, что она непрерывна сверху на пустом множестве. Предположим противное. Тогда найдется убывающая последовательность $\{C_{U_n}(A_n)\}_{n\ge1}$ множеств из $\mathcal{A}$ такая, что $\cap_{n=1}^{\infty} C_{U_n}(A_n) = \varnothing$ и $\mu\{C_{U_n}(A_n)\} > \alpha$ для некоторого $\alpha > 0$ и для всех $n \in \mathbb{N}$. Можно считать, что последовательность $\{U_n\}_{n\ge1}$ конечных множеств возрастает. В противном случае вместо U_n можно взять $U_n' = \cup_{k=1}^{n} U_k = \{u_1, \ldots, u_{r_n}\}$ и записать множество $C_{U_n}(A_n)$ в следующем виде $C_{U_n}(A_n) = C_{U_n'}(A_n')$, где $A_n' = \pi_n^{-1}(A_n)$ является прообразом A_n относительно отображения $\pi_n\colon \mathbb{R}^{dr_n} \to \mathbb{R}^{dm_n}$, переводящего функцию ω_t, $t \in U_n'$, в ее сужение на множество U_n. Далее предполагается, что последовательность $\{U_n\}_{n\ge1}$ возрастает. Если объединение $\cup_{n=1}^{\infty} U_n$ является конечным множеством, скажем, $\cup_{n=1}^{\infty} U_n = \{u_1 \ldots, u_r\}$, то можно считать, что $A_n \subseteq \mathbb{R}^{dr}$ и $U_n = U = \{u_1, \ldots, u_r\}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. В этом случае выполняются равенства $\varnothing = \cap_{n=1}^{\infty} C_{U_n}(A_n) = C_U(\cap_{n=1}^{\infty} A_n)$, и, следовательно, $\cap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$ и $\mu\{C_{U_n}(A_n)\} = \mathbb{P}_{u_1,\ldots,u_r}\{A_n\} \to 0$ при $n \to \infty$.

Далее предполагается, что множество $\cup_{n=1}^{\infty} U_n$ бесконечно. Так как $U_n \subseteq U_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то объединение $\cup_{n=1}^{\infty} U_n$ является последовательностью $\cup_{n=1}^{\infty} U_n = \{t_1, t_2, \dots\}$ и $U_n = \{t_1, \dots, t_{m_n}\}$. Можно считать, что $m_{n+1} = m_n + 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Если $m_n + 2 \leq m_{n+1}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, то построим множество $C_{V_m}(B_m)$, где

$$V_m = \{t_1, \dots, t_m\}, m_n < m < m_{n+1}, B_m = \pi_m^{-1}(A_n),$$

$\pi_m \colon \mathbb{R}^{dm} \to \mathbb{R}^{dm_n}$ – отображение, переводящее функцию ω_t, $t \in U_m$, в ее сужение на множество U_n. Заметим, что $C_{U_n}(A_n) = C_{V_m}(B_m)$ для всех $m = m_n+1, \dots, m_{n+1}-1$ и число элементов в V_{m+1} ровно на единицу больше числа элементов в V_m. Поэтому при необходимости к последовательности $\{C_{U_n}(A_n)\}_{n\geq 1}$ можно добавить другие множества. Пополненная последовательность множеств будет убывать, и пересечение всех ее членов равно пустому множеству. При этом также будет выполняться желаемое условие $m_{n+1} = m_n + 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Для определенности можно считать, что $m_1 = 1$. По предположению выполняется неравенство $\alpha < \mu\{C_{U_n}(A_n)\} = \mathbb{P}_{t_1,\dots,t_n}\{A_n\}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. По теореме 1.4.25 существует компактное множество $B_n \subseteq A_n$ такое, что $\mathbb{P}_{t_1,\dots,t_n}\{A_n \setminus B_n\} < \alpha 2^{-n-1}$. Обозначим $D_1 = B_1$, $D_n = B_n \cap (\cap_{k=1}^{n-1}(B_k \times \mathbb{R}^{d(n-k)}))$ для $n > 1$. Заметим, что выполняются следующие соотношения

$$C_{U_{n+1}}(D_{n+1}) \subseteq C_{U_n}(D_n) \subseteq C_{U_n}(B_n) \subseteq C_{U_n}(A_n),$$
$$C_{U_n}(D_n) = \cap_{k=1}^{n} C_{U_k}(B_k), \cap_{n=1}^{\infty} C_{U_n}(B_n) = \varnothing.$$

Функция μ конечно аддитивна. Поэтому справедливы соотношения

$$\mu\{C_{U_n}(A_n) \setminus C_{U_n}(D_n)\} = \mu\{\cup_{k=1}^{n}(C_{U_n}(A_n) \setminus C_{U_k}(B_k))\} \leq$$
$$\leq \sum_{k=1}^{n} \mu\{C_{U_k}(A_k) \setminus C_{U_k}(B_k)\} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_{t_1,\dots,t_k}\{A_k \setminus B_k\} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha}{2^{k+1}} < \alpha/2.$$

Отсюда и из равенства

$$\mu\{C_{U_n}(D_n)\} = \mu\{C_{U_n}(A_n)\} - \mu\{C_{U_n}(A_n) \setminus C_{U_n}(D_n)\}$$

следует, что $\alpha \leq 2\mu\{C_{U_n}(D_n)\}$. Поэтому множество $C_{U_n}(D_n)$ содержит, по крайней мере, одну функцию $\omega_t^{(n)}$, $t \in T$. Так как множества $C_{U_n}(D_n), n \in \mathbb{N}$, убывают, то для любого фиксированного $m \in \mathbb{N}$ множество $C_{U_m}(D_m)$ содержит все функции $\omega_t^{(n)}$, $t \in T$,

$n \geq m$. Последовательность $\{\omega_{t_1}^{(n)}\}_{n\geq 1}$ точек компактного множества $D_1 = B_1$ содержит подпоследовательность $\{\omega_{t_1}^{(r_{1,n})}\}_{n\geq 1}$, которая сходится к некоторой точке $\hat{\omega}_{t_1} \in D_1 = B_1$. Множество $C_{U_2}(D_2)$ содержит все функции $\omega_t^{(r_{1,n})}$, $t \in T$, $n \geq 2$. Последовательность $\{(\omega_{t_1}^{(r_{1,n})}, \omega_{t_2}^{(r_{1,n})})\}_{n\geq 2}$ точек из компактного множества $D_2 \subseteq B_2$ содержит подпоследовательность $\{(\omega_{t_1}^{(r_{2,n})}\omega_{t_2}^{(r_{2,n})})\}_{n\geq 2}$, сходящуюся к некоторой точке $(\hat{\omega}_{t_1}, \hat{\omega}_{t_2}) \in D_2 \subseteq B_2$. Рассуждая подобным образом, мы придем к последовательности $\{\hat{\omega}_{t_n}\}_{n\geq 1}$ точек из $\mathbb{R}^d$ таких, что $(\hat{\omega}_{t_1}, \ldots, \hat{\omega}_{t_m}) \in D_m \subseteq B_m$ для любого $m \in \mathbb{N}$. Цилиндрическое множество $C_{U_m}(B_m)$ содержит все функции ω_t, $t \in T$, такие, что $\omega_{t_k} = \hat{\omega}_{t_k}$, $k = 1, \ldots, m$. Поэтому пересечение $\cap_{m=1}^{\infty} C_{U_m}(B_m)$ содержит, по крайней мере, одну функцию $\omega_t, t \in T, \omega_{t_m} = \hat{\omega}_{t_m}, m \in \mathbb{N}$. Это противоречит предположению, что $\cap_{m=1}^{\infty} C_{U_m}(B_m) = \varnothing$, и, следовательно, функция μ счетно аддитивна.

(iv). По теореме 1.4.17 мера $\mu\colon \mathcal{A} \to [0,1]$ допускает единственное продолжение $\mathbb{P}^T$ на σ-алгебру $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}((\mathbb{R}^d)^T)$ с сохранением свойства счетной аддитивности. Требуемое вероятностное пространство $((\mathbb{R}^d)^T, \mathcal{B}((\mathbb{R}^d)^T), \mathbb{P}^T)$ построено.

(v). Определим случайный процесс $X = \{X_t, t \in T\}$, положив $X_t(\omega) = \omega_t$ для любых $\omega \in (\mathbb{R}^d)^T$ и $t \in T$. Для любых $t_1, \ldots, t_n \in T$ и $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{dn})$ справедливы равенства $\{(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \in A\} = C_U(A)$ с $U = \{t_1, \ldots, t_n\}$ и $\mathbb{P}^T\{(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \in A\} = \mathbb{P}^T\{C_U(A)\} = \mathbb{P}_{t_1,\ldots,t_n}\{A\}$. Требуемый случайный процесс X построен. ◄

Случайный процесс X, построенный в теореме 3.1.3, называется *координатным случайным процессом.*

3.1.4. Следствие. *Для произвольного семейства вероятностей $\mathbb{P}_t\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to [0,1], t \in T$, существует вероятностное пространство $((\mathbb{R}^d)^T, \mathcal{B}((\mathbb{R}^d)^T), \mathbb{P}^T)$, на котором можно определить независимые случайные векторы $X_t\colon (\mathbb{R}^d)^T \to \mathbb{R}^d$ такие, что*

$$\mathbb{P}^T\{X_t \in A\} = \mathbb{P}_t\{A\} \text{ для любых } t \in T, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

► По следствию 1.7.4 для любых $n \in \mathbb{N}$ и $t_1, \ldots, t_n \in T$ можно построить вероятность $\otimes_{k=1}^n \mathbb{P}_{t_k}$ на σ-алгебре $\otimes_{k=1}^n \mathcal{F}_{t_k} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{dn})$, где $\mathcal{F}_{t_k} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), k = 1, \ldots, n$. Эта вероятность однозначно определяется условием $(\otimes_{k=1}^n \mathbb{P}_{t_k})\{\times_{k=1}^n A_k\} = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}_{t_k}\{A_k\}$ для любых $A_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $k = 1, \ldots, n$. Легко видеть, что семейство вероятностей $\otimes_{k=1}^n \mathbb{P}_{t_k}$ удовлетворяет условиям согласованности (3.1.1) и (3.1.2). Следствие выполняется по теореме 3.1.3. ◄

На случайный процесс $X = \{X_t, t \in T\}$ можно смотреть как на измеримое отображение $X\colon \Omega \to (\mathbb{R}^d)^T$ измеримого пространства $(\Omega, \mathcal{F})$ в измеримое пространство $((\mathbb{R}^d)^T, \mathcal{B}((\mathbb{R}^d)^T))$, переводящее точку $\omega \in \Omega$ в его *траекторию* $X_t(\omega), t \in T$. Доказательство измеримости отображения X стандартно. По теореме 1.2.10 класс $\{X^{-1}(A)\colon A \in \mathcal{B}((\mathbb{R}^d)^T)\}$ является σ-алгеброй. По теореме 1.2.16 измеримые прямоугольники с конечномерными основаниями порождают σ-алгебру $\mathcal{B}((\mathbb{R}^d)^T)$. Поэтому достаточно доказать, что $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ для любого измеримого прямоугольника $A = \times_{t\in T} A_t$, где $A_t = \mathbb{R}^d$ для всех $t \in T$, кроме некоторых $t_1, \dots, t_n$. Так как $\{X_{t_k} \in A_{t_k}\} \in \mathcal{F}$, то $X^{-1}(A) = \cap_{k=1}^n \{X_{t_k} \in A_{t_k}\} \in \mathcal{F}$.

3.1.5. Определение. Вероятность $\mathbb{P}\{X^{-1}(A)\}, A \in \mathcal{B}((\mathbb{R}^d)^T)$, называется *распределением* случайного процесса $X = \{X_t, t \in T\}$.

Распределение и конечномерные распределения случайного процесса взаимно однозначно связаны. Случайные процессы могут быть определены на разных вероятностных пространствах и иметь одинаковые конечномерные распределения.

3.1.6. Определение. Пусть случайные процессы $\{X_t, t \in T\}$ и $\{X'_t, t \in T\}$ определены на вероятностных пространствах $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$ и принимают значения в одном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$. Они называются *одинаково распределенными,* если для любых $n \in \mathbb{N}, t_1, \dots, t_n \in T$ и $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{dn})$ выполняется равенство

$$\mathbb{P}\{(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in A\} = \mathbb{P}'\{(X'_{t_1}, \dots, X'_{t_n}) \in A\}.$$

3.1.7. Определение. Пусть случайные процессы $\{X_t, t \in T\}$ и $\{X'_t, t \in T\}$ определены на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и принимают значения в $\mathbb{R}^d$. Они называются *эквивалентными,* если $\mathbb{P}\{X_t \neq X'_t\} = 0$ для любого $t \in T$. Эквивалентные случайные процессы называются *версиями* друг друга.

Эквивалентные случайные процессы одинаково распределены.

3.1.8. Определение. Пусть случайные процессы $\{X_t, t \in T\}$ и $\{X'_t, t \in T\}$ определены на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и принимают значения в $\mathbb{R}^d$. Они называются *неотличимыми,* если существует множество $\Omega' \in \mathcal{F}, \mathbb{P}\{\Omega'\} = 1$, такое, что для любого $\omega \in \Omega'$ траектории $X_t(\omega)$ и $X'_t(\omega)$, $t \in T$, совпадают.

Неотличимые случайные процессы эквивалентны.

3.1.9. Пример. Обозначим $\mathcal{F}$ сигма-алгебру борелевских подмножеств сегмента $\Omega = [0, 1]$ и $\mathbb{P}$ меру Лебега на $\mathcal{F}$. На вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ определим случайные процессы

$X = \{X_t, t \in T\}$, $Y = \{Y_t, t \in T\}$, $Z = \{Z_t, t \in T\}$ с $T = [0, 1]$:

$X_t(\omega) = 1,$ если $t = \omega,$ и $X_t(\omega) = 0$ в противном случае;
$Y_t(0) = 1$ для всех $t \in T$ и $Y_t(\omega) = 0$ для всех $t \in T$ и $\omega \in (0, 1]$;
$Z_t(\omega) = 0$ для всех $t \in T$ и $\omega \in \Omega$.

Нетрудно видеть, что все три случайных процесса X, Y, Z эквивалентны, а случайные процессы Y и Z неотличимы.

Следующие две теоремы дают представление о связи между понятиями эквивалентности и неотличимости случайных процессов.

3.1.10. Теорема. *Любые эквивалентные случайные процессы* $\{X_t, t \in T\}$ *и* $\{X'_t, t \in T\}$ *со счетным множеством* T *неотличимы.*

▶ Для любого ω из события $\Omega' = \cap_{t \in T}\{X_t = X'_t\} \in \mathcal{F}$ единичной вероятности траектории $X_t(\omega)$ и $X'_t(\omega)$, $t \in T$, совпадают. Это означает, что случайные процессы X и X' эквивалентны. ◀

3.1.11. Определение. Случайный процесс $X = \{X_t, t \in T\}$ с выпуклым множеством T называется *непрерывным* (*непрерывным слева, непрерывным справа*), если все его траектории непрерывны (непрерывны слева, непрерывны справа). Случайный процесс X называется *почти всюду непрерывным* (*почти всюду непрерывным слева, почти всюду непрерывным справа*), если почти все его траектории непрерывны (непрерывны слева, непрерывны справа).

Если $t^* \in T$, то непрерывность случайного процесса в точке t^* следует понимать как непрерывность слева. Аналогично, если $t_* \in T$, то непрерывность случайного процесса в точке t_* следует понимать как непрерывность справа.

3.1.12. Теорема. *Пусть даны эквивалентные случайные процессы* $X = \{X_t, t \in T\}$ *и* $X' = \{X'_t, t \in T\}$ *с выпуклым множеством* T. *Если случайные процессы* X *и* X' *почти всюду непрерывны слева* (*непрерывны справа*), *то они неотличимы.*

▶ Предположим, например, что случайные процессы X и X' п.в. непрерывны слева. Существует событие $\Omega' \in \mathcal{F}, \mathbb{P}\{\Omega'\} = 1$, такое, что для любого $\omega \in \Omega'$ траектории $X_t(\omega)$ и $X'_t(\omega), t \in T$, непрерывны слева. Для любого ω из события $\Omega'' = \cap_{t \in T \cap \mathbb{Q}}\{X_t = X'_t\} \cap \Omega'$ единичной вероятности выполняется равенство $X_t(\omega) = X'_t(\omega)$ для всех $t \in \mathbb{Q} \cap T$. Для любого $t \in T, t > t_*$, найдется возрастающая последовательность $\{t_n\}_{n \geq 1}$ чисел из $\mathbb{Q} \cap T$, которая сходится к t и

$$X_t(\omega) = \lim_{n \to \infty} X_{t_n}(\omega) = \lim_{n \to \infty} X'_{t_n}(\omega) = X'_t(\omega).$$

Если $t_* \notin T$, то $X_t(\omega) = X'_t(\omega)$ для всех $t \in T$ и $\omega \in \Omega''$. Если $t_* \in T$, то траектории $X_t(\omega)$ и $X'_t(\omega)$, $t \in T$, совпадают для любого ω из события $\Omega'' \cap \{X_{t_*} = X'_{t_*}\} \in \mathcal{F}$ единичной вероятности. ◀

3.1.13. Определение. Случайный процесс $X = \{X_t, t \in T\}$ с выпуклым множеством T называется *стохастически непрерывным слева,* если $\lim_{t\uparrow s} \mathbb{P}\{\|X_t - X_s\| > \varepsilon\} = 0$ для любых $s \in T, s > t_*$, и $\varepsilon > 0$. Случайный процесс X называется *стохастически непрерывным справа,* если $\lim_{t\downarrow s} \mathbb{P}\{\|X_t - X_s\| > \varepsilon\} = 0$ для любых $s \in T, s < t^*$, и $\varepsilon > 0$. Случайный процесс называется *стохастически непрерывным,* если он стохастически непрерывен слева и справа. Случайный процесс называется *равномерно стохастически непрерывным,* если

$$\lim_{h\to 0} \sup_{|t-s|<h} \mathbb{P}\{\|X_t - X_s\| > \varepsilon\} = 0 \text{ для любого } \varepsilon > 0. \tag{3.1.3}$$

3.1.14. Теорема. *Стохастически непрерывный случайный процесс $X = \{X_t, t \in T = [a, b]\}$ равномерно стохастически непрерывен.*

▶ Стохастическая непрерывность случайного процесса X равносильна условию: $\lim_{t\to s} \mathbb{P}\{\|X_t - X_s\| > \varepsilon\} = 0$ для любых $s \in T$ и $\varepsilon > 0$. Если случайный процесс X не является равномерно стохастически непрерывным, то $\sup_{|t-s|<h_n} \mathbb{P}\{\|X_t - X_s\| > \varepsilon\} > \alpha$ для некоторых $\alpha > 0$ и $\varepsilon > 0$ и для некоторой последовательности $\{h_n\}_{n\geq 1}, h_n \downarrow 0$. Отсюда следует, что $\mathbb{P}\{\|X_{t_n} - X_{s_n}\| > \varepsilon\} > \alpha/2$ для некоторых $s_n, t_n \in [a, b], |t_n - s_n| < h_n, n \in \mathbb{N}$. Можно считать, что ограниченные последовательности $\{s_n\}_{n\geq 1}$ и $\{t_n\}_{n\geq 1}$ сходятся к некоторому числу $s \in [a, b]$. В противном случае можно взять сходящиеся подпоследовательности. Полагая $n \to \infty$ в неравенствах

$$\mathbb{P}\{\|X_{t_n} - X_{s_n}\| > \varepsilon\} \leq \mathbb{P}\{\|X_{t_n} - X_s\| > \frac{\varepsilon}{2}\} + \mathbb{P}\{\|X_{s_n} - X_s\| > \frac{\varepsilon}{2}\},$$

мы придем к невозможному неравенству $\alpha \leq 0$. ◀

3.2. Сепарабельные случайные процессы

Типичная задача, скажем, вычислить вероятность того, что траектории случайного процесса лежат в данном множестве, может оказаться некорректной. Пусть вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ состоит из сегмента $\Omega = [0, 1]$, сигма-алгебры $\mathcal{F}$ борелевских подмножеств сегмента Ω и меры Лебега $\mathbb{P}$ на $\mathcal{F}$. Известно, что существует неборелевское множество $A \subset [0,1]$. Определим случайный процесс $X = \{X_t, t \in [0,1]\}$, положив $X_t(\omega) = 1$, если $t = \omega \in A$, и $X_t(\omega) = 0$ в противном случае. Множество $\{\omega \in \Omega\colon \max_{0 \le t \le 1} X_t(\omega) = 1\} = A$ не принадлежит сигма-алгебре $\mathcal{F}$. С другой стороны, эта задача корректна для случайного процесса $Y = \{Y_t, t \in [0,1]\}, Y_t = 0$, эквивалентного X. Ниже будет доказано, что для любого случайного процесса со значениями в евклидовом пространстве можно построить версию, для которой сформулированная выше задача корректна. Такие версии называются сепарабельными. Теорема о существовании сепарабельных версий доказана Дубом (Joseph Leo Doob).

Предполагается, что все рассматриваемые случайные процессы $X = \{X_t, t \in T\}$ определены на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и принимают значения в $\mathbb{R}^d$. Обозначим $\overline{X(U,\omega)}$ замыкание множества $X(U,\omega) = \{X_t(\omega) \in \mathbb{R}^d\colon t \in U\}$. Заметим, что $\overline{X(U,\omega)}$ может оказаться подмножеством расширенного евклидова пространства $\overline{\mathbb{R}}^d$. Пересечение $(a,b) \cap T$ интервала $(a,b) \subset \mathbb{R}$ и множества T называется *относительным* интервалом.

3.2.1. Определение. Случайный процесс $X = \{X_t, t \in T\}$ называется *сепарабельным,* если существуют конечное или счетное множество $S, S \subset T$, и событие $N \in \mathcal{F}, \mathbb{P}\{N\} = 0$, такие, что

$$X_u(\omega) \in \bigcap_{J: u \in J} \overline{X(J \cap S, \omega)} \tag{3.2.1}$$

для любых $u \in T$ и $\omega \notin N$, где пересечение осуществляется по всем относительным интервалам J, содержащим точку u.

Событие N нулевой вероятности и множество S, о которых говорится в определении, соответственно называются *исключительным событием* и *сепарантой* случайного процесса X. Любое счетное множество, содержащее сепаранту, также является сепарантой. Случайный процесс может оказаться несепарабельным только в том случае, когда параметрическое множество T несчетно, так как в противном случае условие (3.2.1) выполняется с $S = T$. Далее предполагается, что параметрическое множество T несчетно. Смысл условия (3.2.1) состоит в том, что почти каждая траектория случайного процесса определяется своими значениями на счетном множестве S. Почти всюду непрерывный слева (справа) случайный процесс $\{X_t, t \in T\}$ с выпуклым множеством T является сепарабельным.

Действительно, существует множество $N \in \mathcal{F}$ нулевой вероятности такое, что для любого $\omega \notin N$ траектория $X_t(\omega), t \in T$, непрерывна слева (справа). Условие (3.2.1) выполняется с множеством N и с любым всюду плотным счетным множеством $S \subset T$, к которому следует добавить те из точек t_* и t^*, которые принадлежат T.

3.2.2. Теорема. *Случайный процесс $X = \{X_t, t \in T\}$ является сепарабельным тогда и только тогда, когда существуют счетное множество $S \subset T$ и событие $N \in \mathcal{F}$ нулевой вероятности такие, что*

$$\cap_{t \in J \cap S} \{X_t \in K\} \subseteq \cap_{t \in J}\{X_t \in K\} \cup N \tag{3.2.2}$$

или, что эквивалентно,

$$\cap_{t \in J \cap S} \{X_t \in K\} \subseteq \{X_u \in K\} \cup N, \ \ \forall u \in J, \tag{3.2.3}$$

каковы бы ни были замкнутое множество $K \subseteq \overline{\mathbb{R}}^d$ и относительный интервал J.

► Достаточно доказать, что справедливы следующие импликации (3.2.1) $\to$ (3.2.2) $\to$ (3.2.3) $\to$ (3.2.1). Предположим, что выполнено (3.2.1), $\omega \in \cap_{t \in J \cap S}\{X_t \in K\}$ и $\omega \notin N$. Так как множество K замкнуто и $X_t(\omega) \in K$ для каждого $t \in J \cap S$, то множество $X(J \cap S, \omega)$ и его замыкание $\overline{X(J \cap S, \omega)}$ лежат в K. В силу (3.2.1) для любого $u \in J$ найдется последовательность $\{s_n\}_{n \geq 1}$ чисел $s_n \in J \cap S$ такая, что $X_u(\omega) = \lim_{n \to \infty} X_{s_n}(\omega)$. Так как множество K замкнуто, то $X_u(\omega) \in K$, другими словами, справедливо (3.2.2). Утверждение (3.2.2) $\to$ (3.2.3) очевидно. Если выполняется (3.2.3), то $\omega \in \cap_{t \in J \cap S}\{X_t \in \overline{X(J \cap S, \omega)}\} \subseteq \{X_u \in \overline{X(J \cap S, \omega)}\}$ для любых $J, u \in J, \omega \notin N$ и для $K = \overline{X(J \cap S, \omega)}$ и, следовательно, $X_u(\omega) \in \overline{X(J \cap S, \omega)}$. Это верно для любого J, содержащего точку u. Поэтому $X_u(\omega) \in \cap_{J : u \in J}\overline{X(J \cap S, \omega)}$. ◄

3.2.3. Теорема. *Пусть дан произвольный случайный процесс $X = \{X_t, t \in T\}$. Найдутся счетное множество $S \subset T$ и события $N^u \in \mathcal{F}, u \in T$, нулевой вероятности такие, что*

$$X_u(\omega) \in \bigcap_{J : u \in J} \overline{X(J \cap S, \omega)} \ \text{для любых}\ u \in T, \omega \notin N^u. \tag{3.2.4}$$

► Рассуждая, как при доказательстве теоремы 3.2.2, можно убедиться, что утверждение (3.2.4) эквивалентно утверждению

$$\cap_{t \in J \cap S} \{X_t \in K\} \subseteq \{X_u \in K\} \cup N^u, \ \ \forall u \in J, \tag{3.2.5}$$

каковы бы ни были замкнутое множество $K \subseteq \overline{\mathbb{R}}^d$ и относительный интервал J. Обозначим $U = U(J)$ класс всех счетных подмножеств относительного интервала J. Для любого замкнутого множества $K \subseteq \overline{\mathbb{R}}^d$ найдется конечное или счетное множество $S_{J,K} \subset J$ такое, что $\inf_{V \in U} \mathbb{P}\{\cap_{t\in V}\{X_t \in K\}\} = \mathbb{P}\{\cap_{t\in S_{J,K}}\{X_t \in K\}\}$. Действительно, существуют счетные множества $V_n \in U, n \in \mathbb{N}$, такие, что $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{\cap_{t\in V_n}\{X_t \in K\}\} = \inf_{V\in U} \mathbb{P}\{\cap_{t\in V}\{X_t \in K\}\}$. В качестве $S_{J,K}$ можно взять $\cup_{n=1}^{\infty} V_n, n \in \mathbb{N}$, так как

$$\inf_{V\in U} \mathbb{P}\{\cap_{t\in V}\{X_t \in K\}\} \le \mathbb{P}\{\cap_{t\in \cup_{n=1}^{\infty} V_n}\{X_t \in K\}\} \le \mathbb{P}\{\cap_{t\in V_n}\{X_t \in K\}\}.$$

Обозначим $N^u_{J,K} = \cap_{t\in S_{J,K}}\{X_t \in K\} \cap \{X_u \notin K\}$ для любого $u \in J$. Из соотношений

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{\cap_{t\in S_{J,K}}\{X_t \in K\}\} &= \mathbb{P}\{\cap_{t\in S_{J,K}}\{X_t \in K\} \cap \{X_u \in K\}\}+\\ &+ \mathbb{P}\{N^u_{J,K}\} \ge \mathbb{P}\{\cap_{t\in S_{J,K}}\{X_t \in K\}\} + \mathbb{P}\{N^u_{J,K}\}\end{aligned}$$

следует, что $\mathbb{P}\{N^u_{J,K}\} = 0$. В силу равенства

$$\cap_{t\in S_{J,K}}\{X_t \in K\} = \big(\cap_{t\in S_{J,K}} \{X_t \in K\} \cap \{X_u \in K\}\big) \cup N^u_{J,K}$$

выполняется важное для дальнейшего соотношение

$$\cap_{t\in S_{J,K}} \{X_t \in K\} \subseteq \{X_u \in K\} \cup N^u_{J,K}, \forall u \in J. \tag{3.2.6}$$

Перед теоремой 1.2.6 был определен счетный класс $\mathcal{Q}_d$ прямоугольников таких, что любое открытое множество расширенного евклидова пространства $\overline{\mathbb{R}}^d$ можно представить в виде объединения некоторых прямоугольников из $\mathcal{Q}_d$. Отсюда следует, что любое замкнутое множество $K \subseteq \overline{\mathbb{R}}^d$ можно представить в виде пересечения конечного или счетного числа множеств из счетного класса $\mathcal{K}_d = \{K = \mathbb{R}^d \setminus O \colon O \in \mathcal{Q}_d\}$. Заметим, что класс $\mathcal{K}_d$ состоит из замкнутых множеств. Обозначим $S = \cup' S_{J,K}$ и $N^u = \cup'' N^u_{J,K}$, где объединение $\cup'$ распространяется на все относительные интервалы J с рациональными концами и на все $K \in \mathcal{K}_d$, а объединение $\cup''$ распространяется на все относительные интервалы J с рациональными концами, содержащими u, и на все $K \in \mathcal{K}$. Вероятность события N^u равна нулю, так как оно представляет собой объединение счетного числа событий нулевой вероятности. По теореме 1.1.7. множество S, будучи объединением счетного числа конечных или счетных множеств, конечно или счетно.

Докажем, что утверждение (3.2.5) выполняется с множествами S и $N^u, u \in T$. Произвольное замкнутое множество $K \subseteq \overline{\mathbb{R}}^d$ можно представить в виде пересечения $\cap_{m=1}^{\infty} K_m$, скажем, счетного числа множеств из класса $\mathcal{K}_d$. Относительный интервал J можно представить в виде объединения $\cup_{n=1}^{\infty} J_n$, скажем, счетного числа относительных интервалов с рациональными концами. Если $u \in J$, то найдется относительный интервал J_ν, содержащий u. Утверждение (3.2.5) следует из следующих соотношений

$$\cap_{t \in J \cap S}\{X_t \in K\} \subseteq \cap_{t \in J_\nu \cap S}\{X_t \in K\} = \cap_{m=1}^{\infty} \cap_{t \in J_\nu \cap S} \{X_t \in K_m\} \subseteq$$
$$\subseteq \cap_{m=1}^{\infty} \cap_{t \in S_{J_\nu, K_m}} \{X_t \in K_m\} \subseteq \cap_{m=1}^{\infty}(\{X_u \in K_m\} \cup N^u_{J_\nu, K_m}) \subseteq$$
$$\subseteq \cap_{m=1}^{\infty} (\{X_u \in K_m\} \cup N^u) = \{X_u \in K\} \cup N^u.$$

Здесь (вторая строчка) было использовано утверждение (3.2.6). ◄

Если один из двух эквивалентных случайных процессов обладает свойством сепарабельности, то он называется *сепарабельной версией* другого случайного процесса.

3.2.4. Теорема. *Любой случайный процесс* $X = \{X_t, t \in T\}$, *определенный на полном вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, *имеет сепарабельную версию* $Y = \{Y_t, t \in T\}, Y_t \colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}^d$.

► По теореме 3.2.3 найдутся счетное множество $S \subset T$ и семейство событий $N^u, u \in T$, нулевой вероятности, для которых выполняется утверждение (3.2.4). Заметим, что

$$M^u = \{\omega \in \Omega \colon X_u(\omega) \notin \cap_{J: u \in J} \overline{X(J \cap S, \omega)}\} \subseteq N^u.$$

Так как вероятностное пространство полное и $\mathbb{P}\{N^u\} = 0$, то множество M^u является событием нулевой вероятности. Определим случайный процесс $Y = \{Y_u, u \in T\}$, положив

$$Y_u(\omega) = \begin{cases} X_u(\omega), & \text{если} \quad u \in S, \omega \in \Omega, \\ X_u(\omega), & \text{если} \quad u \notin S, \omega \notin M^u, \\ x, & \text{если} \quad u \notin S, \omega \in M^u, \end{cases} \tag{3.2.7}$$

где x – любая точка множества $\cap_{J: u \in J} \overline{X(J \cap S, \omega)} \subseteq \overline{\mathbb{R}}^d$. По теореме 1.2.6 такая точка x существует. Непосредственно видно, что случайный процесс Y удовлетворяет условию (3.2.1) со счетным множеством S и $N = \varnothing$. Случайные процессы X и Y эквивалентны, так как $\mathbb{P}\{X_u \neq Y_u\} \leq \mathbb{P}\{M^u\} = 0$ для любого $u \in T$. ◄

3.2.5. Теорема. *Пусть дан сепарабельный случайный процесс $X = \{X_t, t \in T\}$ с выпуклым множеством T. Если случайный процесс стохастически непрерывен, то в качестве его сепаранты можно взять любое всюду плотное счетное множество $S \subset T$.*

► Пусть N и S_0 – исключительное событие и сепаранта случайного процесса X и S – любое всюду плотное счетное подмножество множества T. Для любого $u \in T$ найдется последовательность $\{s_n\}_{n\geq 1} \subseteq S$, которая сходится к u и $\lim_{n\to\infty} \|X_{s_n} - X_u\| = 0$ по вероятности. Можно считать, что последовательность $\{\|X_{s_n} - X_u\|\}_{n\geq 1}$ сходится почти всюду. В противном случае можно выбрать подпоследовательность, которая сходится почти всюду. Заметим, что события $N^u = \Omega \setminus \{\lim_{n\to\infty} \|X_{s_n} - X_u\| = 0\}$ и $N_0 = N \cup \cup_{u\in S_0} N^u$ имеют нулевые вероятности. Для любого относительного интервала J и для любых $u \in J \cap S_0$ и $\omega \notin N_0$ имеет место сходимость п.в. $\lim_{n\to\infty} \|X_{s_n}(\omega) - X_u(\omega)\| = 0$. Отсюда следует, что $X_u(\omega) \in \overline{X(J \cap S, \omega)}$. Это справедливо для любого $u \in J \cap S_0$. Поэтому $\overline{X(J \cap S_0, \omega)} \subseteq \overline{X(J \cap S, \omega)}$. Тем самым доказано, что

$$X_u(\omega) \in \cap_{J:u\in J} \overline{X(J \cap S_0, \omega)} \subseteq \cap_{J:u\in J} \overline{X(J \cap S, \omega)}$$

для любых $u \in T$ и $\omega \notin N_0$. Случайный процесс X удовлетворяет условию (3.2.1) с сепарантой S и исключительным событием N_0. ◄

В следующей теореме перечислены некоторые свойства, которыми обладают сепарабельные вещественные случайные процессы. Обозначим $J(T)$ класс всех относительных интервалов множества $T \subseteq \mathbb{R}$ и $\mathcal{E}$ класс множеств вида $[-\infty, a], [a, \infty], [a, b], a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$.

3.2.6. Теорема. *Пусть дан сепарабельный вещественный случайный процесс $X = \{X_t, t \in T\}$ с выпуклым множеством T. Обозначим S и N сепаранту и исключительное событие случайного процесса X. Справедливы следующие утверждения:*

(i) *для любых $J \in J(T)$ и $K \in \mathcal{E}$*

$$\cap_{t\in J\cap S}\{X_t \in K\} \subseteq \cap_{t\in J}\{X_t \in K\} \cup N;$$

(ii) *для любых $J \in J(T)$ и $\omega \notin N$*

$$\inf_{t\in J} X_t(\omega) = \inf_{t\in J\cap S} X_t(\omega), \sup_{t\in J} X_t(\omega) = \sup_{t\in J\cap S} X_t(\omega);$$

(iii) *для любых $J \in J(T)$, $u \in J$, $\omega \notin N$*

$$\inf_{t\in J\cap S} X_t(\omega) \leq X_u(\omega) \leq \sup_{t\in J\cap S} X_t(\omega);$$

(iv) *для любых* $J \in J(T)$, $u \in J$, $\omega \notin N$

$$\liminf_{J \ni t \to u} X_t(\omega) = \liminf_{J \cap S \ni t \to u} X_t(\omega), \limsup_{J \ni t \to u} X_t(\omega) = \limsup_{J \cap S \ni t \to u} X_t(\omega);$$

(v) *для любых* $J \in J(T)$, $u \in J$, $\omega \notin N$

$$\liminf_{J \cap S \ni t \to u} X_t(\omega) \leq X_u(\omega) \leq \limsup_{J \cap S \ni t \to u} X_t(\omega).$$

► Утверждение (i) выполняется по теореме 3.2.2. Достаточно доказать импликации (i) $\to$ (ii) $\to$ (iii) $\to$ (iv) $\to$ (v) $\to$ (i). Импликацию (i) $\to$ (ii) можно доказать методом от противного. Предположим, что (i) выполняется, а (ii) не имеет места, например, для некоторых $J \in J(T)$ и $\omega \notin N$ не выполняется первое из двух равенств. Тогда $\inf_{t \in J} X_t(\omega) < a < \inf_{t \in J \cap S} X_t(\omega)$ для некоторого $a \in \mathbb{R}$. Так как $\omega \in \cap_{t \in J \cap S}\{X_t \in [a, \infty]\}$, то $\omega \in \cap_{t \in J}\{X_t \in [a, \infty]\}$ в силу (i). Это противоречит предположению, что $\inf_{t \in J} X_t(\omega) < a$.

Импликация (ii) $\to$ (iii) следует из соотношений

$$\inf_{t \in J \cap S} X_t(\omega) = \inf_{t \in J} X_t(\omega) \leq X_u(\omega) \leq \sup_{t \in J} X_t(\omega) = \sup_{t \in J \cap S} X_t(\omega)$$

для любых $J \in J(T)$, $u \in J$ и $\omega \notin N$.

Импликация (iii) $\to$ (iv) может быть доказана следующим образом. Пусть $u \in J \in J(T)$, $\omega \notin N$, $J_\varepsilon(u) = (u - \varepsilon, u + \varepsilon) \cap T$, $\varepsilon > 0$. В силу (iii) для любого $v \in J_\varepsilon(u)$ выполняется неравенство $\inf_{t \in J_\varepsilon(u) \cap S} X_t(\omega) \leq X_v(\omega)$. Отсюда, в свою очередь, вытекают неравенство $\inf_{t \in J_\varepsilon(u) \cap S} X_t(\omega) \leq \inf_{v \in J_\varepsilon(u)} X_v(\omega)$ и соотношения

$$\liminf_{J \cap S \ni t \to u} X_t(\omega) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \inf_{t \in J_\varepsilon(u) \cap S} X_t(\omega) \leq \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \inf_{t \in J_\varepsilon(u)} X_t(\omega) = \liminf_{t \to u} X_t(\omega).$$

Величина слева не может быть меньше величины справа, и, следовательно, выполняется первое равенство в (iv). Аналогично можно доказать второе равенство.

Импликация (iv) $\to$ (v) следует из соотношений

$$\liminf_{J \cap S \ni t \to u} X_t(\omega) = \liminf_{J \ni t \to u} X_t(\omega) \leq X_u(\omega) \leq$$
$$\leq \limsup_{J \ni t \to u} X_t(\omega) = \limsup_{J \cap S \ni t \to u} X_t(\omega)$$

для любых $J \in J(T), u \in J, \omega \notin N$.

Импликацию (v) $\to$ (i) можно доказать методом от противного. Пусть (v) выполняется, но (i) не выполняется. Тогда найдутся $\omega \notin N$, $K \in \mathcal{E}$, $J \in J(T)$ такие, что $X_t(\omega) \in K$ для всех $t \in J \cap S$, но $X_u(\omega) \notin K$ для некоторого $u \in J$. Если $K = [a, \infty]$, то будет выполняться невозможное неравенство $X_u(\omega) < a \le \liminf_{J\cap S \ni t \to u} X_t(\omega)$. Если $K = [-\infty, a]$, то будет выполняться невозможное неравенство $\limsup_{J\cap S\ni t\to u} X_t(\omega) \le a < X_u(\omega)$. Наконец, если $K = [a, b]$, то $X_u(\omega) < a$ или $X_u(\omega) > b$. Пусть, например, имеет место второй случай. Тогда снова выполняются невозможные неравенства $\limsup_{J\cap S\ni t\to u} X_t(\omega) \le b < X_u(\omega)$. ◀

3.3. Непрерывные случайные процессы

Траектории произвольного случайного процесса могут обладать весьма причудливыми свойствами. В этом параграфе обсуждаются некоторые достаточные условия для непрерывности траекторий случайных процессов со значениями в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$. Предполагается, что все рассматриваемые далее случайные процессы определены на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

3.3.1. Теорема. *Сепарабельный случайный процесс* $\{X_t, t \in T\}$ *с выпуклым множеством* T *почти всюду непрерывен, если*

$$\lim_{h\downarrow 0} \mathbb{P}\{\sup_{s,t\in T:|s-t|<h} \|X_s - X_t\| > \varepsilon\} = 0,\ \forall \varepsilon > 0. \tag{3.3.1}$$

▶ Заметим, что $Z_h = \sup_{s,t\in T:|s-t|<h} \|X_s - X_t\| \downarrow$ при $h \downarrow 0$. Поэтому существует предел $\lim_{h\downarrow 0} Z_h = Z$. В силу условия (3.3.1) выполняется равенство $Z = 0$ п.в. Для любого $\omega \in \{Z = 0\}$ траектория $X_t(\omega), t \in T$, непрерывна. ◀

3.3.2. Теорема. *Сепарабельный случайный процесс* $\{X_t, t \in T\}$ *с* $T = [a, b], a, b \in \mathbb{R}, a < b$, *почти всюду непрерывен тогда и только тогда, когда выполняется условие* (3.3.1).

▶ В силу теоремы 3.3.1 требуется доказать только необходимость условия (3.3.1). Если почти все траектории случайного процесса X непрерывны, то по теореме Кантора они п.в. равномерно непрерывны. Это означает, что $\lim_{h\downarrow 0} \sup_{|t-s|<h} \|X_s - X_t\| = 0$ п.в. Сходимость п.в. влечет сходимость по вероятности (3.3.1). ◀

3.3.3. Теорема. *Сепарабельный случайный процесс* $\{X_t, t \in T\}$

с выпуклым множеством T почти всюду непрерывен, если

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\sup_{s\in T}\mathbb{P}\{\sup_{t\in T:|s-t|<h}\|X_s-X_t\|>\varepsilon\}=0,\ \forall\varepsilon>0. \tag{3.3.2}$$

► Предположим сначала, что $T=[a,b]$. Можно считать, что $[a,b]=[0,1]$, так как случайные процессы $\{X_t, t\in[a,b]\}$ и $\{X_{a+t(b-a)}, t\in[0,1]\}$ обладают одинаковыми свойствами гладкости. Обозначим

$$Y_n^{(m)}=\sup_{m/n\le s\le(m+2)/n}\|X_s-X_{m/n}\|, m,n\in\mathbb{N}, 0\le m\le n-2, n>2.$$

По условию (3.3.2) выполняются соотношения

$$\mathbb{P}\{\max_{0\le m\le n-2}Y_n^{(m)}>\varepsilon\}\le n\max_{0\le m\le n-2}\mathbb{P}\{Y_n^{(m)}>\varepsilon\}\to 0$$

при $n\to\infty$. Если $s,t\in[0,1], |s-t|<1/n, n>2$, то найдется целое число $m\in[0,n-2]$ такое, что $m/n\le s,t\le(m+2)/n$. Из неравенств $\|X_s-X_t\|\le\|X_s-X_{m/n}\|+\|X_t-X_{m/n}\|\le 2Y_n^{(m)}$ следует, что

$$\mathbb{P}\{\sup_{0\le s,t\le 1:|s-t|<1/n}\|X_s-X_t\|>\varepsilon\}\le 2n\max_{0\le m\le n-2}\mathbb{P}\{Y_n^{(m)}>\varepsilon/2\}\to 0$$

при $n\to\infty$. Для любого $h\in(0,1/3)$ найдется $n(h)\in\mathbb{N}$ такое, что $h<1/n(h)$ и $n(h)\uparrow\infty$ при $h\downarrow 0$. Из соотношений

$$\sup_{0\le s,t\le 1:|s-t|<h}\|X_s-X_t\|\le\sup_{s,t\in T:|s-t|<1/n(h)}\|X_s-X_t\|\to 0$$

при $h\downarrow 0$ следует (3.3.1). По теореме 3.3.2 почти все траектории случайного процесса $\{X_t, t\in[0,1]\}$ непрерывны.

Докажем теорему в общем случае. Выпуклое множество T, если оно отлично от сегмента, можно представить в виде объединения $T=\cup_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$, где $[a_n,b_n]\subset[a_{n+1},b_{n+1}]$. По доказанному выше для любого $n\in\mathbb{N}$ существует событие $\Omega_n\in\mathcal{F}, \mathbb{P}\{\Omega_n\}=1$, такое, что для любого $\omega\in\Omega_n$ функция $X_t(\omega), t\in[a_n,b_n]$, непрерывна. Событие $\Omega'=\cap_{n=1}^{\infty}\Omega_n\in\mathcal{F}$ имеет единичную вероятность, и для любого $\omega\in\Omega'$ траектория $X_t(\omega), t\in T$, непрерывна. ◄

3.3.4. Теорема. *Пусть случайный процесс $X=\{X_t,\ t\in T\}$ с выпуклым множеством T удовлетворяет условию*

$$\mathbb{P}\{\|X_s-X_t\|\ge p(|t-s|)\}\le q(|t-s|) \tag{3.3.3}$$

для некоторого $\delta > 0$ *и для любых* $s, t \in T, |s-t| < \delta$, *и для некоторых неубывающих функций* $p, q\colon [0,\delta] \to \mathbb{R}_+$ *со свойствами*

$$\int_0^\delta p(u)\,\frac{du}{u} < \infty, \quad \int_0^\delta q(u)\,\frac{du}{u^2} < \infty. \tag{3.3.4}$$

Тогда существует непрерывная версия $Y = \{Y_t, t \in T\}$ *случайного процесса* X. *Более того, для любого конечного сегмента* $[a,b] \subseteq T$ *существует функция* $H\colon \Omega \to \mathbb{N}$ *такая, что для любых* $\omega \in \Omega$ *и* $h \in (0, 2^{-H(\omega)} \wedge \delta)$ *выполняется неравенство*

$$\sup_{s,t\in[a,b]:|t-s|<h/2} \|Y_s(\omega) - Y_t(\omega)\| \le \frac{2}{\ln 2}\int_0^h p(u)\,\frac{du}{u}. \tag{3.3.5}$$

► Предположим сначала, что $T = [a,b]$. Можно считать, что $[a,b] = [0,1]$ и $\delta = 1$. Обозначим $S = \{k2^{-m}\colon k = 0,\dots,2^m, m \in \mathbb{N}\}$ и $Z_m = \max_{0\le\nu<2^m} \|X_{(\nu+1)2^{-m}} - X_{\nu 2^{-m}}\|$. В силу условия (3.3.3) выполняется неравенство $\mathbb{P}\{\|X_{(\nu+1)2^{-m}} - X_{\nu 2^{-m}}\| \ge p(2^{-m})\} \le q(2^{-m})$. Из этого неравенства следует, что

$$\sum_{m=1}^\infty \mathbb{P}\{Z_m \ge p(2^{-m})\} \le \sum_{m=1}^\infty 2^m q(2^{-m}) \le$$
$$\le \sum_{m=1}^\infty \int_{2^{-m}}^{2^{-m+1}} q(u)\,\frac{du}{u^2} \le \int_0^1 q(u)\,\frac{du}{u^2} < \infty.$$

По лемме Бореля–Кантелли (применить теорему 1.5.16 с $\mu = \mathbb{P}$) событие $\Omega' = \cup_{n=1}^\infty \cap_{m=n}^\infty \{Z_m < p(2^{-m})\}$ имеет единичную вероятность. Определим функцию $H\colon \Omega \to \mathbb{N}$, положив $H(\omega) = 1$ для $\omega \notin \Omega'$ и $H(\omega) = n(\omega)$ для $\omega \in \Omega \setminus \Omega'$, где $n(\omega)$ равно наименьшему числу $n \in \mathbb{N}$ такому, что $\omega \in \cap_{m=n}^\infty \{Z_m < p(2^{-m})\}$.

(i). Докажем, что для любых $\omega \in \Omega', h \in (0, 2^{-H(\omega)}), s, t \in S$, $|s-t| < h/2$, выполняется неравенство

$$\|X_s(\omega) - X_t(\omega)\| \le \frac{2}{\ln 2}\int_0^h \frac{p(u)}{u}\,du. \tag{3.3.6}$$

Найдется $n \in \mathbb{N}$ такое, что $2^{-n-1} \le h < 2^{-n}$. Так как $|s-t| < 2^{-n-1}$, то найдется $k \in \{0,1,\dots,2^{n+1}\}$ такое, что $|s - k2^{-n-1}| < 2^{-n-1}$ и $|t - k2^{-n-1}| < 2^{-n-1}$. Число t можно записать в следующем виде

$t = k2^{-n-1} \pm (j_{n+2}2^{-n-2} + \cdots + j_r 2^{-r})$, где каждый из коэффициентов $j_l, l = n+2, \ldots, r$, равен нулю или единице. Предположим, например, что $k2^{-n-1} < t$, и, следовательно, $t = k2^{-n-1} + j_{n+2}2^{-n-2} + \cdots + j_r 2^{-r}$. Обозначим $t_m = k2^{-n-1} + j_{n+2}2^{-n-2} + \cdots + j_m 2^{-m}$, $m = n+1, \ldots, r$, где $t_{n+1} = k2^{-n-1}$. Заметим, что $t_{m+1} - t_m \le 2^{-m-1}$ и $Z_m(\omega) < p(2^{-m})$. Отсюда и из неравенства треугольника следует, что

$$\|X_t(\omega) - X_{k2^{-n-1}}(\omega)\| \le \sum_{m=n+1}^{r-1} \|X_{t_m}(\omega) - X_{t_{m+1}}(\omega)\| \le$$
$$\le \sum_{m=n+1}^{\infty} Z_m(\omega) \le \sum_{m=n+1}^{\infty} p(2^{-m}) \le$$
$$\le \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{\ln 2} \int_{2^{-m}}^{2^{-m+1}} \frac{p(u)}{u}\, du = \frac{1}{\ln 2} \int_0^{2^{-n-1}} \frac{p(u)}{u}\, du.$$

Аналогично можно доказать неравенство

$$\|X_s(\omega) - X_{k2^{-n-1}}(\omega)\| \le \frac{1}{\ln 2} \int_0^{2^{-n-1}} \frac{p(u)}{u}\, du.$$

Из этих оценок и из неравенства треугольника следует (3.3.6).

(ii). Докажем, что для любых $\omega \in \Omega'$ и $t \in [0,1]$ существует предел $\lim_{S \ni s \to t} X_s(\omega)$. Пусть $S \ni s_n \to t$ при $n \to \infty$. Из неравенства (3.3.6), в котором следует положить $t = s_n, s = s_r, h = 2|s_n - s_r|$, следует, что $\lim_{n,r\to\infty} \|X_{s_n}(\omega) - X_{s_r}(\omega)\| = 0$. Это означает, что последовательность $\{X_{s_n}(\omega)\}_{n\ge1}$ удовлетворяет условию Коши и, следовательно, сходится.

Определим случайный процесс $Y = \{Y_t, t \in [0,1]\}$, положив

$$Y_t(\omega) = \begin{cases} X_t(\omega), & \text{если } t \in S, \omega \in \Omega, \\ \lim_{S\ni s\to t} X_s(\omega), & \text{если } t \in [0,1] \setminus S, \omega \in \Omega', \\ x, & \text{если } t \in [0,1] \setminus S, \omega \in \Omega \setminus \Omega', \end{cases}$$

где x – произвольная фиксированная точка из $\mathbb{R}^d$.

(iii). Случайные процессы $\{X_t, t \in [0,1]\}$ и $\{Y_t, t \in [0,1]\}$ эквивалентны. Чтобы увидеть это, заметим, что $\lim_{h\to0} p(h) = 0$ и $\lim_{h\to0} q(h) = 0$ в силу (3.3.4). Отсюда и из условия (3.3.3) следует, что случайный процесс $\{X_t, t \in [0,1]\}$ стохастически непрерывен. Если $t \in S$, то $X_t = Y_t$. Пусть $S \ni s_n \to t \in [0,1] \setminus S$ при $n \to \infty$.

Последовательности $\{\|X_t - X_{s_n}\|\}_{n\geq 1}$ и $\{\|Y_t - X_{s_n}\|\}_{n\geq 1}$ сходятся по вероятности к нулю. Отсюда следует равенство $X_t = Y_t$ п.в., так как

$$\|X_t - Y_t\| \leq \|X_t - X_{s_n}\| + \|Y_t - X_{s_n}\| \to 0 \text{ п.в. при } n \to \infty.$$

(iv). Докажем неравенство (3.3.5). Оно справедливо для любого $\omega \in \Omega \setminus \Omega'$, так как $Y_t(\omega) = x$ для всех $t \in [0,1]$. Предположим, что $\omega \in \Omega', h \in (0, 2^{-H(\omega)})$. Для любых $s, t \in [0,1], |s-t| < h/2$, найдутся последовательности $\{s_n\}_{n\geq 1}$ и $\{t_n\}_{n\geq 1}$ чисел из S, которые сходятся к s и t. Для всех достаточно больших n выполняется неравенство $|s_n - t_n| < h/2$. Для таких $s = s_n$ и $t = t_n$ выполняется неравенство (3.3.6), из которого следует (3.3.5) при $n \to \infty$. Из (3.3.5) следует непрерывность случайного процесса $\{Y_t, t \in [0,1]\}$.

(v). Докажем теорему в общем случае. Выпуклое множество T, не являющееся сегментом, можно представить в виде объединения $T = \cup_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$ расширяющихся сегментов. По доказанному выше для любого $n \in \mathbb{N}$ найдутся непрерывная версия $\{Y_t^{(n)}, t \in [a_n, b_n]\}$ случайного процесса $\{X_t, t \in [a_n, b_n]\}$ и функция $H_n\colon \Omega \to \mathbb{N}$ такие, что (3.3.5) выполняется для $Y_t = Y_t^{(n)}$ и $[a,b] = [a_n, b_n]$. Для любых $n \in \mathbb{N}$ и $t \in [a_n, b_n]$ существует множество $\Omega_{n,t} \in \mathcal{F}, \mathbb{P}\{\Omega_{n,t}\} = 1$, на котором выполняются равенства $Y_t^{(n)}(\omega) = X_t(\omega) = Y_t^{(n+1)}(\omega)$. Обозначим $\mathbb{Q}_T$ объединение множества $\mathbb{Q} \cap T$ и тех точек t_* и t^*, которые принадлежат T. Множество $\Omega''_n = \cap_{t\in\mathbb{Q}_T\cap[a_n,b_n]}\Omega_{n,t} \in \mathcal{F}$ имеет единичную вероятность. Для любого $\omega \in \Omega''_n$ выполняется равенство $Y_t^{(n)}(\omega) = Y_t^{(n+1)}(\omega)$ для всех $t \in \mathbb{Q} \cap [a_n, b_n]$. На самом деле равенство выполняется для всех $t \in [a_n, b_n]$ в силу непрерывности функций $Y_t^{(n)}(\omega)$ и $Y_t^{(n+1)}(\omega), t \in [a_n, b_n]$. Множество $\Omega'' = \cap_{n=1}^{\infty}\Omega''_n \in \mathcal{F}$ имеет единичную вероятность. Определим случайный процесс $Y = \{Y_t, t \in T\}$, положив

$$Y_t(\omega) = \begin{cases} Y_t^{(n)}(\omega), & \text{если } \omega \in \Omega'', t \in [a_n, b_n] \text{ для некоторого } n \in \mathbb{N}, \\ x, & \text{если } \omega \in \Omega \setminus \Omega'', t \in T, \end{cases}$$

где x – произвольная фиксированная точка из $\mathbb{R}^d$. Случайный процесс Y является непрерывной версией данного случайного процесса X. Любой сегмент $[a,b] \subseteq T$ содержится в некотором сегменте $[a_n, b_n]$. Неравенство (3.3.5) выполняется с $H = H_n$. ◀

3.3.5. Теорема. *Если случайный процесс $X = \{X_t, t \in T\}$ с вы-*

пуклым множеством T удовлетворяет условию

$$\mathbb{E}\|X_t - X_s\|^{\alpha} \le c|s-t|^{1+\beta}$$

для любых $s, t \in T$ и для некоторых чисел $\alpha > 0, \beta > 0, c > 0$, то он имеет непрерывную версию $Y = \{Y_t, t \in T\}$ со свойством

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h^{\gamma}} \sup_{s,t\in[a,b]:|s-t|<h} \|Y_t - Y_s\| = 0 \tag{3.3.7}$$

для любого $\gamma \in (0, \beta/\alpha)$ и для любого сегмента $[a, b] \subseteq T$.

▶ Возьмем числа $\delta_n \in (0, \beta/\alpha), n \in \mathbb{N}$, такие, что $\delta_n < \delta_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\lim_{n\to\infty} \delta_n \to \beta/\alpha$. Заметим, что функции $p_n(u) = u^{\delta_n}$ и $q_n(u) = cu^{1+(\beta-\alpha\delta_n)}$, $u \in [0, 1]$, удовлетворяют условиям из теоремы 3.3.4. Действительно, нетрудно проверить, что

$$\int_0^1 p_n(u)\,\frac{du}{u} = \frac{1}{\delta_n} < \infty, \int_0^1 q_n(u)\,\frac{du}{u^2} = \frac{c}{\beta - \alpha\delta_n} < \infty,$$

$$\mathbb{P}\{\|X_t - X_s\| > p_n(|s-t|)\} \le \frac{\mathbb{E}\|X_t - X_s\|^{\alpha}}{|s-t|^{\delta_n \alpha}} \le q_n(|s-t|).$$

По теореме 3.3.4 для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется непрерывная версия $Y^{(n)} = \{Y_t^{(n)}, t \in T\}$ случайного процесса X такая, что для любого сегмента $[a, b] \subset T$ существует функция $H_n\colon \Omega \to \mathbb{N}$ такая, что для любых $\omega \in \Omega$ и $h \in (0, 2^{-H_n(\omega)})$ выполняется неравенство

$$\sup_{s,t\in[a,b]:|s-t|<h/2} \|Y_t^{(n)}(\omega) - Y_s^{(n)}(\omega)\| \le \frac{2}{\ln 2} \int_0^h p_n(u)\,\frac{du}{u}. \tag{3.3.8}$$

Для любых $t \in T$ и $n \in \mathbb{N}$ существует событие $\Omega_{n,t} \in \mathcal{F}, \mathbb{P}\{\Omega_{n,t}\} = 1$, на котором выполняются равенства $Y_t^{(n)} = X_t = Y_t^{(n+1)}$. На множестве $\Omega_n = \cap_{t\in\mathbb{Q}_T} \Omega_{n,t} \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}\{\Omega_n\} = 1$, выполняется равенство $Y_t^{(n)} = Y_t^{(n+1)}$ для всех $t \in \mathbb{Q}_T$. На самом деле это равенство выполняется для всех $t \in T$ в силу непрерывности случайных процессов $Y^{(n)}$ и $Y^{(n+1)}$. На множестве $\Omega' = \cap_{n=1}^{\infty} \Omega_n \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}\{\Omega'\} = 1$, выполняется равенство $Y_t^{(n)}(\omega) = Y_t^{(m)}(\omega)$ для всех $t \in T$ и для всех $n, m \in \mathbb{N}$. Определим случайный процесс $Y = \{Y_t, t \in T\}$, положив

$$Y_t(\omega) = \begin{cases} Y_t^{(1)}(\omega), & \text{если } \omega \in \Omega', \\ x, & \text{если } \omega \in \Omega \setminus \Omega', \end{cases}$$

где x — произвольная точка из $\mathbb{R}^d$. Случайный процесс Y является непрерывной версией случайного процесса X.

Далее, любое число $\gamma \in (0, \beta/\alpha)$ строго меньше некоторого δ_n. Для этого n случайные процессы Y и $Y^{(n)}$ совпадают на множестве Ω' и $Y_t(\omega) = x$ для всех $\omega \in \Omega \setminus \Omega'$ и для всех $t \in T$. Отсюда и из (3.3.8) следует (3.3.7). ◀

3.4. Процессы без разрывов второго рода

Существует ряд достаточных условий, чтобы траектории случайных процессов не имели разрывов второго рода. О некоторых таких условиях пойдет речь в этом параграфе. Предполагается, что все рассматриваемые случайные процессы $X = \{X_t, t \in T\}$ определены на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и принимают значения в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$. В качестве параметрического множества выступает произвольное бесконечное выпуклое множество $T \subseteq \mathbb{R}$. Нам понадобятся некоторые сведения о функциях без разрывов второго рода.

3.4.1. Определение. Функция $f\colon T \to \mathbb{R}^d$ не имеет *разрывов второго рода,* если существуют предел слева $\lim_{s\uparrow t} f(s) = f(t-) \in \mathbb{R}^d$ для любого $t \in T, t > t_*$, и предел справа $\lim_{s\downarrow t} f(s) = f(t+) \in \mathbb{R}^d$ для любого $t \in T, t < t^*$. Положим $f(t_*-) = f(t_*)$, если $t_* \in T$, и $f(t^*+) = f(t^*)$, если $t^* \in T$. Разность $\Delta f(t) = f(t+) - f(t-)$ называется *скачком* функции f в точке $t \in T$. Число $\|\Delta f(t)\|$ называется *величиной* скачка функции f в точке $t \in T$.

3.4.2. Теорема. *Пусть дана функция* $f\colon T \to \mathbb{R}^d$ *без разрывов второго рода. Тогда для любых чисел* $c > 0, a, b \in T, a < b$, *множество* $E_{c,a,b} = \{t \in [a,b]\colon \|\Delta f(t)\| \geq c\}$ *конечно, множество* $E = \{t \in T\colon \|\Delta f(t)\| > 0\}$ *конечно или счетно.*

▶ Напомним, что пустое множество считается конечным. Любое выпуклое множество T можно представить в виде объединения $T = \cup_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$ расширяющихся сегментов $[a_n, b_n] \subseteq [a_{n+1}, b_{n+1}]$. Множество E можно записать в виде объединения $E = \cup_{n=1}^{\infty}\{t \in [a_n, b_n]\colon \|\Delta(t)\| > 0\}$. К множеству E следует добавить те точки t_* и t^*, которые принадлежат T и в которых величины скачков функции положительны. Для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство $\{t \in [a_n, b_n]\colon \|\Delta f(t)\| > 0\} = \cup_{r=1}^{\infty} E_{1/r, a_n, b_n}$. Поэтому достаточно доказать, что для любых $c > 0, a, b \in T, a < b$, множество $E_{c,a,b}$

конечно. Предположим противное, что некоторое множество $E_{c,a,b}$ содержит бесконечное число точек. Найдется монотонная, скажем, возрастающая последовательность $\{t_m\}_{m\geq 1}$ точек из $E_{c,a,b}$. Она сходится к некоторому числу $t \in (a, b]$ и $\lim_{m\to\infty} f(t_m) = f(t-)$. Можно считать, что $a < t_m < t \leq b$ для всех $m \in \mathbb{N}$. Для каждого $m \in \mathbb{N}$ найдутся последовательности $\{s'_{m,l}\}_{l\geq 1}$ и $\{s''_{m,l}\}_{l\geq 1}$ чисел из (a, b) такие, что $s'_{m,l} \uparrow t_m$ и $s''_{m,l} \downarrow t_m$ при $l \uparrow \infty$ и

$$\lim_{l\to\infty} \|f(s'_{m,l}) - f(s''_{m,l})\| = \|f(t_m+) - f(t_m-)\| \geq c.$$

Найдется l_m такое, что $t_m - 1/m < s'_{m,l_m} < t_m < s''_{m,l_m} < t_m + 1/m$, $s'_{m,l_m}, s''_{m,l_m} < t$, $\|f(s'_{m,l_m}) - f(s''_{m,l_m})\| \geq c/2$. Заметим, что обе последовательности $\{s'_{m,l_m}\}_{m\geq 1}$ и $\{s''_{m,l_m}\}_{m\geq 1}$ сходятся слева к t. Поэтому $\lim_{m\to\infty} f(s'_{m,l_m}) = \lim_{m\to\infty} f(s''_{m,l_m}) = f(t-)$, что противоречит неравенству $\|f(s'_{m,l_m}) - f(s''_{m,l_m})\| \geq c/2$. ◄

3.4.3. Теорема. *Если функция $f\colon T \to \mathbb{R}^d$ не имеет разрывов второго рода, то $\sup_{a\leq t\leq b} \|f(t)\| < \infty$ для любых $a, b \in T, a < b$. Если $\|\Delta f(t)\| \leq c$ для некоторого $c > 0$ и для всех $t \in T$, то для любых $\varepsilon > 0, a, b \in T, a < b$, существует $\delta = \delta(\varepsilon, a, b) > 0$ такое, что $\|f(t) - f(s)\| < c + \varepsilon$ для любых $s, t \in [a, b], |t - s| < \delta$.*

► Если $A = \sup_{a\leq t\leq b} \|f(t)\| = \infty$ для некоторых $a, b \in T, a < b$, то найдется монотонная, скажем, возрастающая последовательность $\{t_n\}_{n\geq 1}$ чисел из $[a, b]$ такая, что $\|f(t_n)\| \geq n$. Последовательность $\{t_n\}_{n\geq 1}$ сходится к некоторому $t \in (a, b]$. Предположение, что $A = \infty$ ведет к противоречию $\infty = \lim_{n\to\infty} \|f(t_n)\| = \|f(t-)\| < \infty$.

Докажем второе утверждение. Предположим противное, что второе утверждение не выполняется для некоторого конечного сегмента $[a, b] \subseteq T$. Это означает, что для некоторого $\varepsilon > 0$ и для любого $\delta > 0$ найдутся $s, t \in [a, b], |t - s| < \delta$, такие, что $\|f(t) - f(s)\| \geq c + \varepsilon$. Возьмем убывающую последовательность $\{\delta_n\}_{n\geq 1}$ положительных чисел, сходящуюся к нулю. Для любого $n \in \mathbb{N}$ найдутся $s_n, t_n \in [a, b]$ такие, что $|t_n - s_n| < \delta_n$ и $\|f(t_n) - f(s_n)\| \geq c + \varepsilon$. Можно считать, что последовательности $\{t_n\}_{n\geq 1}$ и $\{s_n\}_{n\geq 1}$ монотонны и сходятся к некоторому $t \in [a, b]$. В противном случае можно выделить соответствующие подпоследовательности упомянутых последовательностей. Возможны четыре варианта, так как каждая из последовательностей может возрастать или убывать. Предположим, например, что $s_n \uparrow t$ и $t_n \downarrow t$ при $n \uparrow \infty$. Предположение, что $\|f(t_n) - f(s_n)\| \geq c + \varepsilon$ для всех $n \in \mathbb{N}$ ведет к противоречию

$$c + \varepsilon \le \lim_{n\to\infty} \|f(t_n) - f(s_n)\| = \|f(t+) - f(t-)\| \le c. \quad ◄$$

3.4.4. Определение. Функция $f\colon T \to \mathbb{R}^d$ называется *регулярной справа,* если она непрерывна справа в каждой точке $t \in T, t < t^*$, и имеет предел слева в каждой точке $t \in T, t > t_*$. Функция f называется *регулярной слева,* если она непрерывна слева в каждой точке $t \in T, t > t_*$, и имеет предел справа в каждой точке $t \in T, t < t^*$.

3.4.5. Теорема. *Пусть функция $f\colon S \to \mathbb{R}^d$ определена на всюду плотном счетном подмножестве S множества T. Предположим, что существуют пределы $\lim_{S\ni s\uparrow t} f(s) = g(t-) \in \mathbb{R}^d$ для всех $t \in T, t > t_*$, и $\lim_{S\ni s\downarrow t} f(s) = g(t+) \in \mathbb{R}^d$ для всех $t \in T$, $t < t^*$. Тогда функция $g(t-), t \in T, t > t_*$, регулярна слева, функция $g(t+), t \in T, t < t^*$, регулярна справа и $\sup_{t\in[a,b]\cap S} \|f(t)\| < \infty$ для любых $a, b \in T, a < b$.*

► Докажем, например, что функция $g(t+), t \in T, t < t^*$, регулярна справа. Пусть $a \in T, a < t^*$. По условию существует предел $\lim_{S\ni s\downarrow a} f(s) = g(a+) \in \mathbb{R}^d$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $\|g(a+) - f(s)\| < \varepsilon$ для всех $s \in (a, a+\delta) \cap S$. Отсюда следует, что $\|g(a+) - g(t+)\| = \lim_{S\ni s\downarrow t} \|g(a+) - f(s)\| \le \varepsilon$ для любого $t \in (a, a+\delta) \cap T$. Это означает, что функция $g(t+), t \in T, t < t^*$, непрерывна справа.

Возьмем любое $a \in (t_*, t^*)$. По предположению существует предел $\lim_{S\ni s\uparrow a} f(s) = g(a-) \in \mathbb{R}^d$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $\|g(a-) - f(s)\| < \varepsilon$ для всех $s \in (a - \delta, a) \cap S$. Для любых $t', t'' \in (a - \delta, a) \cap T$ найдутся убывающие последовательности $\{s'_n\}_{n\ge1}$ и $\{s''_n\}_{n\ge1}$ чисел из S, сходящиеся к t' и t''. Заметим, что

$$\|g(t'+) - g(t''+)\| = \lim_{n\to\infty} \|f(s'_n) - f(s''_n)\| \le$$
$$\le \limsup_{n\to\infty} (\|f(s'_n) - g(a-)\| + \|g(a-) - f(s''_n)\|) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Отсюда следует, что $\lim_{t',t''\uparrow a} \|g(t'+) - g(t''+)\| = 0$. Это означает, что функция $g(t+), t \in (a - \delta, a) \cap T$, удовлетворяет условию Коши и, следовательно, существует предел $\lim_{t\uparrow a} g(t+) \in \mathbb{R}^d$.

Докажем, что $A = \sup_{t\in[a,b]\cap S} \|f(t)\| < \infty$ для любых $a, b \in T$, $a < b$. Если $A = \infty$ для некоторых $a, b \in T, a < b$, то найдется монотонная, скажем, возрастающая, последовательность $\{t_n\}_{n\ge1}$ чисел из $[a,b]\cap S$ такая, что $\|f(t_n)\| \geq n$. Последовательность $\{t_n\}_{n\geq 1}$ сходится к некоторому $t \in (a,b]\cap T$. Предположение, что $A = \infty$ ведет к противоречию $\infty = \lim_{n\to\infty} \|f(t_n)\| = \|g(t-)\| < \infty$. ◀

3.4.6. Определение. Случайный процесс $X = \{X_t, t \in T\}$ называется *регулярным справа* (*регулярным слева*), если все его траектории регулярны справа (регулярны слева). Случайный процесс X не имеет *разрывов второго рода,* если все его траектории не имеют разрывов второго рода. Случайный процесс X *п.в. регулярен справа* (*п.в. регулярен слева, п.в. не имеет разрывов второго рода*), если существует множество $\Omega' \in \mathcal{F}$ единичной вероятности такое, что для любого $\omega \in \Omega'$ траектория $X_t(\omega), t \in T$, регулярна справа (регулярна слева, не имеет разрывов второго рода).

3.4.7. Теорема. *Если случайный процесс $X = \{X_t, t \in T\}$ с выпуклым множеством $T, t_* \in T$, удовлетворяет условию*

$$\mathbb{P}\{\|X_{t_1} - X_{t_2}\|\|X_{t_2} - X_{t_3}\| \geq p^2(t_3 - t_1)\} \leq q(t_3 - t_1) \qquad (3.4.1)$$

для любых $t_1, t_2, t_3 \in T, t_1 < t_2 < t_3, t_3 - t_1 < \delta$, для некоторого $\delta > 0$ и для некоторых неубывающих функций $p, q\colon [0,\delta] \to \mathbb{R}_+$ со свойствами

$$\int_0^\delta \frac{p(u)}{u}\,du < \infty, \int_0^\delta \frac{q(u)}{u^2}\,du < \infty, \qquad (3.4.2)$$

то X имеет версию $Y = \{Y_t, t \in T\}$ без разрывов второго рода.

▶ Предположим сначала, что $T = [a,b]$. Можно считать, что $[a,b] = [0,1]$, так как случайные процессы $\{X_t, t \in [a,b]\}$ и $\{X_{a+t(b-a)}, t \in [0,1]\}$ одновременно имеют или нет разрывы второго рода. Можно считать, что $\delta = 1$, так как конкретное значение δ не имеет значения. Из неравенств

$$p(2^{-n}) \leq \frac{1}{\ln 2}\int_{2^{-n}}^{2^{-n+1}} \frac{p(u)}{u}\,du, 2^n q(2^{-n}) \leq 2\int_{2^{-n}}^{2^{-n+1}} \frac{q(u)}{u^2}\,du, n \in \mathbb{N},$$

и условий (3.4.2) следует, что

$$\sum_{n=1}^\infty p(2^{-n}) < \infty, \sum_{n=1}^\infty 2^n q(2^{-n}) < \infty. \qquad (3.4.3)$$

Доказательство теоремы будет разбито на несколько этапов. Обозначим $S = \{t_{n,k} = k2^{-n} \colon k = 0, \dots, 2^n, n \in \mathbb{N}\}$ и определим события

$$\begin{aligned} A_{n,r} &= \{\|X_{t_{n,r}} - X_{t_{n,r+1}}\| < p(2^{-n})\}, r = 0, 1, \dots, 2^n - 1, \\ B_{n,r} &= A_{n,r-1} \cup A_{n,r}, r = 1, \dots, 2^n - 1, \\ C_n &= \cap_{k=n}^{\infty} \cap_{r=1}^{2^k-1} B_{k,r}, C = \cup_{n=1}^{\infty} C_n, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

(i). Докажем, что $\mathbb{P}\{C\} = 1$. Так как $C = \cup_{n=1}^{\infty} C_n$ и $C_n \uparrow$, то $\mathbb{P}\{C\} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{C_n\}$ по теореме 1.4.3. Достаточно доказать, что $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{C_n^c\} = 0$. В силу условия (3.4.1) выполняется неравенство $\mathbb{P}\{B_{k,r}^c\} = \mathbb{P}\{A_{k,r-1}^c \cap A_{k,r}^c\} \le q(2^{-k})$ и, следовательно,

$$\mathbb{P}\{C_n^c\} = \mathbb{P}\{\cup_{k=n}^{\infty} \cup_{r=1}^{2^k-1} B_{k,r}^c\} \le \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{r=1}^{2^k-1} P\{B_{k,r}^c\} \le \sum_{k=n}^{\infty} 2^k q(2^{-k}).$$

Величина справа стремится к нулю при $n \to \infty$ по условию (3.4.3).

(ii). Заметим, что любое число $t \in [t_{n,r}, t_{n,r+1}] \cap S$ можно записать в следующем виде $t = t_{m,s} = s2^{-m}$ с некоторыми целыми $m \ge n$ и $s \in \{0, \dots, 2^m\}$. Докажем, что на множестве $A_{n,r} \cap C_{n+1}$ выполняется неравенство

$$\|X_{t_{m,s}} - X_{t_{n,r}}\| \vee \|X_{t_{m,s}} - X_{t_{n,r+1}}\| < L_m = \sum_{k=n}^{m} p(2^{-k}). \qquad (3.4.4)$$

Неравенство выполняется для $m = n$, так как возможны только два случая $s = r$ или $s = r + 1$. Далее можно рассуждать по индукции. Предположим, что (3.4.4) выполняется для некоторого $m > n$ и для всех $t_{m,s} \in [t_{n,r}, t_{n,r+1}]$. Предположим, что $t_{m+1,s} \in [t_{n,r}, t_{n,r+1}]$ для некоторого $s \in \{0, \dots, 2^{m+1}\}$. Если $s = 2j$, то $t_{m+1,2j} = t_{m,j}$ и, следовательно, неравенство (3.4.4) с $t_{m+1,s} = t_{m,j}$ выполняется. Пусть $s = 2j + 1$. Точка $t_{m+1,2j+1}$ является центром сегмента $[t_{m,j}, t_{m,j+1}] \subseteq [t_{n,r}, t_{n,r+1}]$. Так как $C_{n+1} \subseteq B_{m+1,2j+1}$, то выполняется одно из двух неравенств $\|X_{t_{m,j}} - X_{t_{m+1,2j+1}}\| < p(2^{-m-1})$ или $\|X_{t_{m+1,2j+1}} - X_{t_{m,j+1}}\| < p(2^{-m-1})$. Если, например, справедливо первое из этих неравенств, то

$$\begin{aligned} &\|X_{t_{n,r}} - X_{t_{m+1,2j+1}}\| \le \|X_{t_{n,r}} - X_{t_{m,j}}\| + \|X_{t_{m,j}} - X_{t_{m+1,2j+1}}\| < L_{m+1}, \\ &\|X_{t_{m+1,2j+1}} - X_{t_{n,r+1}}\| \le \|X_{t_{m,j}} - X_{t_{n,r+1}}\| + \|X_{t_{m+1,2j+1}} - X_{t_{m,j}}\| < L_{m+1}. \end{aligned}$$

По индуктивному принципу (3.4.4) выполняется для всех $m \in \mathbb{N}$.

(iii). Докажем, что для любого $\omega \in B_{n,r} \cap C_{n+1}$ существует число $a = a(\omega) \in [t_{n,r-1}, t_{n,r+1}]$ такое, что

$$\|X_t(\omega) - X_{t_{n,r}}(\omega)\| < \sum_{k=n}^{\infty} p(2^{-k}), \text{ если } t \in [t_{n,r-1}, a) \cap S, \quad (3.4.5)$$

$$\|X_t(\omega) - X_{t_{n,r+1}}(\omega)\| < \sum_{k=n}^{\infty} p(2^{-k}), \text{ если } t \in (a, t_{n,r+1}] \cap S. \quad (3.4.6)$$

Далее в этом пункте ω считается фиксированным и не будет указываться в качестве аргумента. Например, вместо $X_t(\omega)$ мы будем писать X_t. Условимся говорить, что число $t \in [t_{n,r-1}, t_{n,r+1}] \cap S$ принадлежит *нижнему классу* (*верхнему классу*), если выполняется неравенство (3.4.5) слева от слова *если* (выполняется неравенство (3.4.6) слева от слова *если*). Заметим, что классы зависят от ω.

Так как $\omega \in B_{n,r} \cap C_{n+1}$, то выполняется одно из неравенств

$$\|X_{t_{n,r-1}} - X_{t_{n,r}}\| < p(2^{-n}), \|X_{t_{n,r}} - X_{t_{n,r+1}}\| < p(2^{-n}). \quad (3.4.7)$$

Если выполняются оба неравенства, то $\omega \in A_{n,r-1} \cap A_{n,r}$. В силу (ii) выполняется неравенство (3.4.4) и аналогичное неравенство с заменой r на $r-1$. Поэтому неравенство (3.4.5) выполняется для всех $t_{m,s} \in [t_{n,r-1}, t_{n,r}) \cap S$ и неравенство (3.4.6) выполняется для всех $t_{m,s} \in (t_{n,r}, t_{n,r+1}] \cap S$. В этом случае следует положить $a = t_{n,r}$.

Предположим, например, что первое неравенство (3.4.7) выполняется, а второе неравенство не выполняется. Тогда ω принадлежит пересечению $A_{n,r-1} \cap C_{n+1}$, и, следовательно, выполняется неравенство (3.4.4) с $r-1$ вместо r. Поэтому выполняется неравенство (3.4.5) для всех $t_{m,s} \in [t_{n,r-1}, t_{n,r}] \cap S$. Все точки множества $[t_{n,r-1}, t_{n,r}] \cap S$ следует отнести к нижнему классу. Множество $[t_{n,r}, t_{n,r+1}]$ является объединением множеств $[t_{n+1,2r}, t_{n+1,2r+1}]$ и $[t_{n+1,2r+1}, t_{n+1,2(r+1)}]$. Так как $\omega \in B_{n,r} \cap C_{n+1} \subseteq B_{n,r} \cap B_{n+1,2r+1}$, то выполняется одно из неравенств

$$\begin{aligned} &\|X_{t_{n,r}} - X_{t_{n+1,2r+1}}\| < p(2^{-n-1}), \\ &\|X_{t_{n+1,2r+1}} - X_{t_{n,r+1}}\| < p(2^{-n-1}). \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

Если выполняются оба неравенства, то выполняется неравенство (3.4.4) и, следовательно, выполняются неравенства (3.4.5) и (3.4.6).

В этом случае следует положить $a = t_{n+1,2r+1}$. Предположим, например, что выполняется второе неравенство (3.4.8), а первое неравенство не выполняется. Тогда $\omega \in A_{n+1,2r+1} \cap C_n \subseteq A_{n+1,2r+1} \cap C_{n+2}$. Поэтому выполняется неравенство (3.4.4) с $n+1$ и $2r+1$ вместо n и r для всех $t_{m,s} \in [t_{n+1,2r+1}, t_{n,r+1}] \cap S$. Это означает, что все точки множества $[t_{n+1,2r+1}, t_{n,r+1}]$ следует отнести к верхнему классу. Оставшееся множество $[t_{n,r}, t_{n+1,2r+1}]$ является объединением следующих двух множеств $[t_{n,r}, t_{n+2,4r+1}] = [t_{n+2,4r}, t_{n+2,4r+1}]$ и $[t_{n+2,4r+1}, t_{n+1,2r+1}] = [t_{n+2,4r+1}, t_{n+2,4r+2}]$. Так как $\omega \in B_{n,r} \cap C_{n+1}$, то $\omega \in B_{n,r} \cap B_{n+2,4r+1}$ и должно выполняться одно из неравенств

$$\|X_{t_{n,r}} - X_{t_{n+2,4r+1}}\| < p(2^{-n-2}), \|X_{t_{n+2,4r+1}} - X_{t_{n+1,2r+1}}\| < p(2^{-n-2}).$$

Мы находимся в знакомой ситуации, которая встречалась дважды. Если оба неравенства выполняются, то множества $[t_{n,r}, t_{n+2,4r+1}] \cap S$ и $[t_{n+2,4r+1}, t_{n+1,2r+1}] \cap S$ следует отнести соответственно к нижнему классу и к верхнему классу. Если выполняется первое неравенство, то множество $[t_{n,r}, t_{n+2,4r+1}] \cap S$ следует отнести к нижнему классу. Если выполняется второе неравенство, то множество $[t_{n+2,4r+1}, t_{n+1,2r+1}] \cap S$ следует отнести к верхнему классу. Рассуждая подобным образом, можно построить две последовательности $\{t_{n+k,r_k}\}_{k\geq 1}, t_{n+k,r_k} \uparrow a_1$, и $\{t_{n+m,r_m}\}_{m\geq 1}, t_{n+m,r_m} \downarrow a_2$, такие, что множества $[t_{n,r-1}, t_{n+k,r_k}] \cap S$ и $[t_{n+m,r_m}, t_{n,r+1}] \cap S$ относятся соответственно к нижнему классу и к верхнему классу. Из построения последовательностей $\{t_{n+k,r_k}\}_{k\geq 1}$ и $\{t_{n+m,r_m}\}_{m\geq 1}$ следует, что $a_1 = a_2$. Величина $a = a_1 = a_2$ удовлетворяет неравенствам (3.4.5) и (3.4.6).

(iv). Докажем, что на множестве C существуют пределы

$$\begin{aligned} &\lim_{S\ni s\uparrow t} X_s = Z_{t-} \in \mathbb{R}^d \text{ для любого } t \in (0,1], \\ &\lim_{S\ni s\downarrow t} X_s = Z_{t+} \in \mathbb{R}^d \text{ для любого } t \in [0,1). \end{aligned} \tag{3.4.9}$$

Докажем сначала, что для любого $\omega \in C$ функция $X_t(\omega), t \in S$, ограничена. Предположим противное, что $A = \sup_{t\in S} \|X_t(\omega)\| = \infty$ для некоторого $\omega \in C$. Для любого $m \in \mathbb{N}$ найдется $t_m \in S$ такое, что $\|X_{t_m}(\omega)\| \geq m$. Можно считать, что последовательность $\{t_m\}_{m\geq 1}$ монотонна, скажем, возрастает. Она сходится к некоторому $t \in (0,1]$ и $\lim_{m\to\infty} \|X_{t_m}(\omega)\| = \infty$. Так как $\omega \in C = \cup_{n=1}^{\infty} C_n$ и $C_n \uparrow$ при $n \to \infty$, то $\omega \in C_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ больше некоторого $n_0 \in \mathbb{N}$. Фиксируем $n \in \mathbb{N}, n > n_0$. Так как $\omega \in C_n \subseteq B_{n,r} \cap C_{n+1}$ для всех

$r \in \{1,\dots,2^{n-1}-1\}$, то $t_{n,r-1} < t \le t_{n,r+1}$. Сравним t с a, о котором говорится в (iii). Возможны случай $t \le a$ или $a < t$. Предположим, например, что $t \le a$. Тогда $t_m \in [t_{n,r-1}, t)$ для бесконечного числа $m \in \mathbb{N}$. В силу (3.4.5) и (3.4.3) выполняются неравенства

$$\|X_{t_m}(\omega) - X_{t_{n,r}}(\omega)\| \le \sum_{k=n}^{\infty} p(2^{-k}) = d < \infty$$

для всех $t_{n,r} \le t_m$. Отсюда следуют противоречивые соотношения $\infty = \lim_{m\to\infty} \|X_{t_m}(\omega)\| \le \|X_{t_{n,r}}(\omega)\| + d$ и, следовательно, $A < \infty$.

Докажем (3.4.9). Предположим противное, например, что предел $\lim_{s\uparrow t} X_s(\omega)$ не существует для некоторых $\omega \in C$ и $t \in (0,1]$. В этом случае найдутся последовательность $\{X_{t_l}\}_{l\ge 1}, S \ni t_l \uparrow t$, и число $\varepsilon > 0$ такие, что $\|X_{t_l}(\omega) - X_{t_{l+1}}(\omega)\| > \varepsilon$ для всех $l \in \mathbb{N}$. Так как $\omega \in C = \cup_{n=1}^{\infty} C_n$ и $C_n \uparrow$, то $\omega \in C_n \subset B_{n,r} \cap C_{n+1}$ для всех $r \in \{1,\dots,2^n-1\}$ и для всех $n \in \mathbb{N}$ больше некоторого $n_0 \in \mathbb{N}$. В силу условия (3.4.3) число n_0 можно выбрать настолько большим, чтобы выполнялось неравенство $\sum_{j=n_0}^{\infty} p(2^{-j}) < \varepsilon/2$. Фиксируем $n \in \mathbb{N}, n > n_0$. Найдется $r \in \{1,\dots,2^n-1\}$ такое, что $t_{n,r-1} < t \le t_{n,r+1}]$. Сравним t и a, о котором говорится в (iii). Предположим, например, что $t \le a$. В этом случае $t_l \in [t_{n,r-1}, t)$ для всех достаточно больших $l \in \mathbb{N}$. Для таких m, в силу (3.4.5), выполняются противоречивые неравенства

$$\varepsilon < \|X_{t_l}(\omega) - X_{t_{l+1}}(\omega)\| \le \|X_{t_l}(\omega) - X_{t_{n,r}}(\omega)\| + \\ + \|X_{t_{n,r}}(\omega) - X_{t_{l+1}}(\omega)\| < \varepsilon.$$

Поэтому предел слева в (3.4.9) существует.

(v). Пусть случайный процесс $Y = \{Y_t, t \in [0,1]\}$ определен на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и принимает значения в $\mathbb{R}^d$. Предположим, что $Y_0 = X_0, Y_1 = X_1$, для любых $t \in (0,1)$ и $\omega \in C$ выполняется одно из равенств $Y_t(\omega) = Z_{t-}(\omega)$ или $Y_t(\omega) = Z_{t+}(\omega)$, где Z_{t-} и Z_{t+} определены в (3.4.9). Тогда для любого $\omega \in C$ функция $Y_t(\omega), t \in [0,1]$, не имеет разрывов второго рода.

Докажем, например, что существует предел $\lim_{s\uparrow t} Y_s(\omega) \in \mathbb{R}^d$ для любых $\omega \in C$ и $t \in (0,1]$. Возьмем произвольную строго возрастающую последовательность $\{s_n\}_{n\ge 1}$ чисел из $(0,1]$, сходящуюся к t. Построим последовательность $\{t_n\}_{n\ge 2}$ чисел из S по следующему правилу. Если $Y_{s_n}(\omega) = Z_{s_n-}(\omega)$, то следует взять $t_n \in S$ такое, что

$$0 < s_n - t_n < \frac{1}{2}\min\{s_n - s_{n-1}, s_{n+1} - s_n\}, \|X_{t_n}(\omega) - Y_{s_n}(\omega)\| < \frac{1}{n}.$$

Если $Y_{s_n}(\omega) = Z_{s_n+}(\omega)$, то следует взять $t_n \in S$ такое, что

$$0 < t_n - s_n < \frac{1}{2}\min\{s_n - s_{n-1}, s_{n+1} - s_n\}, \|X_{t_n}(\omega) - Y_{s_n}(\omega)\| < \frac{1}{n}.$$

Последовательность $\{t_n\}_{n\geq 2}$ возрастает и сходится к t. По доказанному в (iv) существует предел $\lim_{n\to\infty} X_{t_n}(\omega) = Z_{t-}(\omega)$. Отсюда следует, что $\lim_{n\to\infty} Y_{s_n}(\omega) = Z_{t-}(\omega)$.

(vi). Построим требуемый случайный процесс. Пусть $t \in (0,1)$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ число t содержится в $(t_{n,r_n-1}, t_{n,r_n+1})$ для некоторого $r_n \in \{1, \dots, 2^n - 1\}$. По условию (3.4.2) и по условию (3.4.1) с $t_1 = t_{n,r_n-1} < t_2 = t < t_{n,r_n+1}$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\{C \cap \{\|X_{t_{n,r_n-1}} - X_t\|\|X_t - X_{t_{n,r_n+1}}\| > p^2(2^{-2n})\}\} \leq \\ &\quad \leq \mathbb{P}\{\|X_{t_{n,r_n-1}} - X_t\|\|X_t - X_{t_{n,r_n+1}}\| > p^2(2^{-2n})\} \leq q(2^{-2n}) \to 0\end{aligned}$$

при $n \to \infty$. По доказанному в (iv) на событии C существуют пределы $\lim_{n\to\infty} X_{t_{n,r_n-1}} = Z_{t-}$ и $\lim_{n\to\infty} X_{t_{n,r_n+1}} = Z_{t+}$. Отсюда следует, что $\mathbb{P}\{C \cap \{\|Z_{t-} - X_t\|\|X_t - Z_{t+}\| > 0\}\} = 0$. Это означает, что на событии C выполняется одно из равенств $X_t = Z_{t-}$ п.в. или $X_t = Z_{t+}$ п.в. Обозначим $U_t = C \cap \{X_t = Z_{t-}\}$, $V_t = C \cap \{X_t = Z_{t+} \neq Z_{t-}\}$. Определим случайный процесс $Y = \{Y_t, t \in [0,1]\}$, положив

$$Y_t(\omega) = \begin{cases} X_0(\omega), & \text{если } t = 0, \omega \in \Omega, \\ Z_{t-}(\omega), & \text{если } t \in (0,1), \omega \in C \cap U_t, \\ Z_{t+}(\omega), & \text{если } t \in (0,1), \omega \in C \cap V_t, \\ Z_{t-}(\omega), & \text{если } t \in (0,1), \omega \in C \setminus (V_t \cup U_t), \\ x, & \text{если } t \in (0,1), \omega \in \Omega \setminus C, \\ X_1(\omega), & \text{если } t = 1, \omega \in \Omega, \end{cases}$$

где x – произвольная точка из $\mathbb{R}^d$.

Из определения случайного процесса Y непосредственно следует, что он является версией случайного процесса $\{X_t, t \in [0,1]\}$. Случайный процесс Y не имеет разрывов второго рода. Действительно, для любого $\omega \in C$ траектория $Y_t(\omega), t \in [0,1]$, не имеет разрывов второго рода по доказанному в (v). Если $\omega \notin C$, то траектория $Y_t(\omega), t \in [0,1]$, постоянна.

(vii). Докажем теорему в общем случае. Выпуклое множество T содержит свою левую граничную точку t_* и не является сегментом. Множество T можно представить в объединения $T = \cup_{n=1}^{\infty}[t_*, b_n]$

строго расширяющихся сегментов. По доказанному выше для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует версия $Y^{(n)} = \{Y_t^{(n)}, t \in [t_*, b_n]\}$ случайного процесса X без разрывов второго рода. Определим случайный процесс $Y = \{Y_t, t \in T\}$, положив $Y_t = Y_t^{(2)}$, если $t \in [t_*, b_1]$, $Y_t = Y_t^{(n+1)}$, если $b_{n-1} < t \leq b_n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Нетрудно видеть, что случайный процесс Y является версией случайного процесса X без разрывов второго рода. ◄

Теорема 3.4.7 является итогом ряда обобщений следующей теоремы Ченцова (Николай Николаевич Ченцов).

3.4.8. Теорема. *Если случайный процесс $X = \{X_t, t \in T\}$ с выпуклым множеством $T, t_* \in T$, удовлетворяет условию*

$$\mathbb{E}(\|X_{t_1} - X_{t_2}\| \cdot \|X_{t_2} - X_{t_3}\|)^\alpha \leq c|t_3 - t_1|^{1+\beta}$$

для любых $t_1, t_2, t_3 \in T, t_1 < t_2 < t_3$, и для некоторых чисел $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, то существует версия $Y = \{Y_t, t \in T\}$ случайного процесса X без разрывов второго рода.

► Возьмем число $\gamma \in (0, \beta/\alpha)$ и определим функции

$$p(h) = h^{\gamma/2}, q(h) = ch^{1+\beta-\alpha\gamma}, h \in [0,1].$$

По неравенству Маркова – Чебышева (теорема 1.6.7)

$$\mathbb{P}\{\|X_{t_1} - X_{t_2}\| \cdot \|X_{t_2} - X_{t_3}\| \geq p^2(t_3 - t_1)\} \leq \\ \leq \frac{\mathbb{E}(\|X_{t_1} - X_{t_2}\|\|X_{t_2} - X_{t_3}\|)^\alpha}{p^{2\alpha}(t_3 - t_1)} \leq q(t_3 - t_1)$$

для любых $t_1, t_2, t_3 \in T, t_1 < t_2 < t_3, t_3 - t_1 < 1$ выполняется условие (3.4.1) теоремы 3.4.7 с функциями p и q. Эти функции возрастают и, как нетрудно убедиться, удовлетворяют условиям (3.4.2). Можно применить теорему 3.4.7, по которой случайный процесс X имеет версию Y без разрывов второго рода. ◄

3.5. Фильтрация

Понятие фильтрации привносит идею движения в исследования случайных процессов. Будучи связанной со случайным процессом, фильтрация аккумулирует информацию о нем. Предполагается, что все случайные процессы, о которых пойдет речь, определены на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и принимают значения в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$.

3.5.1. Определение. Семейство $\mathbb{F}_T = \{\mathcal{F}_t \colon \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}, t \in T\}$ сигма-алгебр называется *фильтрацией,* если $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ для любых $s, t \in T$, $s < t$. Фильтрация $\mathbb{F}_T$ называется *расширенной,* если любое множество $A \in \mathcal{F}$ нулевой вероятности принадлежит всем сигма-алгебрам $\mathcal{F}_t, t \in T$.

По данной фильтрации $\mathbb{F}_T$ можно строить другие фильтрации. Например, $\mathbb{F}_{T+} = \{\mathcal{F}_{t+}, t \in T\}$ и $\mathbb{F}_{T-} = \{\mathcal{F}_{t-}, t \in T\}$, положив $\mathcal{F}_{t^*+} = \mathcal{F}_{t^*}$, если $t^* \in T$, и $\mathcal{F}_{t_*-} = \mathcal{F}_{t_*}$, если $t_* \in T$, $\mathcal{F}_{t+} = \cap_{T \ni s > t} \mathcal{F}_s$, если $t \in T$, $t < t^*$, и $\mathcal{F}_{t-} = \sigma(\mathcal{F}_s, s < t, s \in T)$, если $t_* \leq t \in T$.

3.5.2. Определение. Фильтрация $\mathbb{F}_T$ называется *непрерывной справа,* если $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$ для любого $t \in T$. Фильтрация $\mathbb{F}_T$ называется *непрерывной слева,* если $\mathcal{F}_{t-} = \mathcal{F}_t$ для любого $t \in T$.

Легко убедиться, что фильтрация $\mathbb{F}_{T+}$, построенная по фильтрации $\mathbb{F}_T$ с выпуклым множеством T, непрерывна справа.

Существуют фильтрации, которые не являются непрерывными справа. Пусть случайная величина $\xi \colon \Omega \to \mathbb{R}$ принимает не менее двух значений. Обозначим $\mathcal{F}_t = \sigma(s\xi, 0 \leq s \leq t)$. Нетрудно видеть, что $\mathcal{F}_t = \sigma(\xi)$ для $t > 0$ и $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \varnothing\}$ и, следовательно, $\mathcal{F}_0 \neq \cap_{t>0} \mathcal{F}_t$.

Фильтрация $\mathbb{F}_{\mathbb{N}} = \{\mathcal{F}_n \colon \mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}, n \in \mathbb{N}\}$ непрерывна справа тогда и только тогда, когда все сигма-алгебры $\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}$, равны между собой. Это следует из равенств $\mathcal{F}_{n+} = \cap_{m>n} \mathcal{F}_m = \mathcal{F}_{n+1}$.

Пусть дана фильтрация $\mathbb{F}_T = \{\mathcal{F}_t \colon \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}, t \in T\}$ с выпуклым параметрическим множеством T. Нам понадобятся следующие классы $\mathcal{N} = \{A \colon A \in \mathcal{F}, \mathbb{P}\{A\} = 0\}, \mathcal{G}_t = \sigma(\mathcal{F}_t, \mathcal{N})$, $\mathcal{G}_{t+} = \cap_{T \ni s > t} \mathcal{G}_s$, если $t \in T, t < t^*$, и $\mathcal{G}_{t^*+} = \mathcal{G}_{t^*}$, если $t^* \in T$.

3.5.3. Теорема. *Пусть дана фильтрация $\mathbb{F}_T = \{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ с выпуклым множеством T. Тогда фильтрация $\mathcal{G}_{T+} = \{\mathcal{G}_{t+}, t \in T\}$ непрерывна справа, расширена и обладает минимальным свойством в том смысле, что $\mathcal{G}_{t+} \subseteq \mathcal{H}_t$ для любого $t \in T$, какова бы ни была расширенная, непрерывная справа фильтрация $\{\mathcal{H}_t, t \in T\}$ такая, что $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{H}_t$ для любого $t \in T$.*

► Фильтрация $\mathcal{G}_{T+}$ расширена и непрерывна справа, так как $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{G}_t \subseteq \mathcal{G}_{t+}$ и $\cap_{T \ni s > t} \mathcal{G}_{s+} = \cap_{T \ni s > t} \cap_{T \ni u > s} \mathcal{G}_u = \cap_{T \ni s > t} \mathcal{G}_s = \mathcal{G}_{t+}$ для любого $t \in T$. Убедимся, что фильтрация $\mathcal{G}_{T+}$ обладает минимальным свойством. Пусть дана любая фильтрация $\{\mathcal{H}_t, t \in T\}$ со свойствами, указанными в формулировке теоремы. Так как $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{H}_t$, то $\mathcal{G}_t \subseteq \sigma(\mathcal{H}_t, \mathcal{N}) = \mathcal{H}_t$. Отсюда следует, что $\mathcal{G}_{t^*+} = \mathcal{G}_{t^*} \subseteq \mathcal{H}_{t^*}$, если $t^* \in T$, и $\mathcal{G}_{t+} = \cap_{T \ni s > t} \mathcal{G}_s \subseteq \cap_{T \ni s > t} \mathcal{H}_s = \mathcal{H}_t$, если $t \in T, t < t^*$. ◀

3.5.4. Определение. Случайный процесс $X = \{X_t, t \in T\}$ называется *согласованным* с фильтрацией $\mathbb{F}_T$, если для любого $t \in T$ случайный вектор X_t измерим относительно σ-алгебры $\mathcal{F}_t$.

Пусть дан случайный процесс $X = \{X_t, t \in T\}$. Фильтрация $\mathbb{F}_T^{(X)} = \{\mathcal{F}_t^{(X)}, t \in T\}$, где $\mathcal{F}_t^{(X)} = \sigma(X_s, s \in T, s \leq t)$, называется *естественной фильтрацией* случайного процесса X. Фильтрация $\mathcal{G}_T^{(X)} = \{\mathcal{G}_t^{(X)}, t \in T\}$, где $\mathcal{G}_t^{(X)} = \sigma(\mathcal{F}_t^{(X)}, \mathcal{N})$, называется *расширенной естественной фильтрацией* случайного процесса X. Случайный процесс согласован с каждой из своих естественных фильтраций. Если $t \in T$ интерпретировать как время, то σ-алгебры $\mathcal{F}_t^{(X)}$ и $\mathcal{F}_{t-}^{(X)} = \sigma(\mathcal{F}_s^{(X)}, s \in T, s < t)$ содержат информацию о поведении случайного процесса вплоть до момента t и строго до момента t.

3.5.5. Теорема. *Если случайный процесс $X = \{X_t, t \in T\}$ с выпуклым множеством T непрерывен слева, то его естественные фильтрации $\mathbb{F}_T^{(X)}$ и $\mathcal{G}_T^{(X)}$ непрерывны слева.*

► Докажем, например, что фильтрация $\mathbb{F}_T^{(X)}$ непрерывна слева. Пусть $T \ni t_n < t, n \in \mathbb{N}, t_n \uparrow t$. Случайный вектор X_{t_n} измерим относительно σ-алгебры $\mathcal{F}_{t_n}^{(X)}$ и, следовательно, $\mathcal{F}_{t-}^{(X)}$-измерим. По теореме 1.5.7 случайный вектор X_t измерим относительно σ-алгебры $\mathcal{F}_{t-}^{(X)}$, так как $X_t = \lim_{n\to\infty} X_{t_n}$. Поэтому $\sigma(X_t) \subseteq \mathcal{F}_{t-}^{(X)}$ и, следовательно, $\mathcal{F}_t^{(X)} \subseteq \mathcal{F}_{t-}^{(X)}$. Так как $\mathcal{F}_{t-}^{(X)} \subseteq \mathcal{F}_t^{(X)}$, то $\mathcal{F}_t^{(X)} = \mathcal{F}_{t-}^{(X)}$. ◀

3.5.6. Теорема. *Если случайный процесс $X = \{X_t, t \in T\}$ с выпуклым множеством T стохастически непрерывен слева, то его расширенная естественная фильтрация $\mathcal{G}_T^{(X)}$ непрерывна слева.*

► Пусть $T \ni t_n < t, n \in \mathbb{N}, t_n \uparrow t$. Последовательность $\{X_{t_n}\}_{n\geq 1}$ сходится по вероятности к X_t. Можно считать, что она сходится почти всюду. В противном случае по теореме 1.5.14 вместо $\{X_{t_n}\}_{n\geq 1}$ можно взять некоторую ее подпоследовательность, которая сходится п.в. к X_t. Множество $\Omega_t = \{\lim_{n\to\infty} X_{t_n} = X_t\}$ является событием единичной вероятности. Поэтому оно принадлежит всем сигма-алгебрам $\mathcal{G}_{s-}^{(X)}$. Обозначим $Y_{t_n} = \mathbb{1}_{\Omega_t} X_{t_n}$ и $Y_t = \mathbb{1}_{\Omega_t} X_t$. Случайный вектор Y_{t_n} измерим относительно σ-алгебры $\mathcal{G}_{t-}^{(X)}$. По теореме 1.5.7 случайный вектор Y_t измерим относительно σ-алгебры $\mathcal{G}_{t-}^{(X)}$, так как он является поточечным пределом $\mathcal{G}_{t-}^{(X)}$-измеримых случайных векторов $Y_{t_n}, n \in \mathbb{N}$. Убедимся, что случайный вектор X_t измерим относительно $\mathcal{G}_{t-}^{(X)}$. Действительно, для любого $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ справедливо равенство $\{X_t \in A\} = (\{Y_t \in A\} \cap \Omega_t) \cap (\{X_t \in A\} \cap \Omega_t^c)$. Пересечение $\{Y_t \in A\} \cap \Omega_t$ принадлежит σ-алгебре $\mathcal{G}_{t-}^{(X)}$. Пересечение $\{X_t \in A\} \cap \Omega^c$, будучи событием нулевой вероятности, принадлежит классу $\mathcal{N} \subset \mathcal{G}_{t-}^{(X)}$. Тем самым доказано, что $\{X_t \in A\} \in \mathcal{G}_{t-}^{(X)}$, другими словами, что случайный вектор X_t измерим относительно сигма-алгебры $\mathcal{G}_{t-}^{(X)}$. Поэтому $\sigma(X_t) \subseteq \mathcal{G}_{t-}^{(X)}$ и, следовательно, $\mathcal{G}_t^{(X)} \subseteq \mathcal{G}_{t-}^{(X)}$. Так как $\mathcal{G}_{t-}^{(X)} \subseteq \mathcal{G}_t^{(X)}$, то $\mathcal{G}_{t-}^{(X)} = \mathcal{G}_t^{(X)}$. ◄

3.6. Марковские моменты

При исследовании данного случайного процесса $\{X_t, t \in T\}$ может возникнуть необходимость найти информацию о величине $X_{t(\omega)}(\omega)$ при значении параметра $t(\omega)$, зависящем от элементарного события. Эта необходимость привела к понятию марковского момента. Предполагается, что даны вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и фильтрация $\mathbb{F}_T = \{\mathcal{F}_t \colon \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}, t \in T\}$.

3.6.1. Определение. Функция $\tau \colon \Omega \to T \cup \{\infty\}$ называется $\mathbb{F}_T$-*марковским моментом* или *марковским моментом* относительно фильтрации $\mathbb{F}_T$, если $\{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t$ для любого $t \in T$.

Функция $\tau \colon \Omega \to T$, тождественно равная числу $u \in T$, является примером марковского момента. Действительно, $\{\tau \le t\} = \varnothing \in \mathcal{F}_t$, если $t \in T$, $t < u$, и $\{\tau \le t\} = \Omega \in \mathcal{F}_t$, если $t \in T$, $t \ge u$.

3.6.2. Теорема. *Если* τ *является* $\mathbb{F}_T$-*марковским моментом, то* $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$ *для любого* $t \in T$.

► Возможны случаи $t_* \in T$ и $t_* \notin T$. Предположим. что $t_* \in T$. Если $t = t_*$, то $\{\tau < t\} = \varnothing \in \mathcal{F}_t$. Если $t \in T, t > t_*$, то найдутся числа $s_n \in T, n \in \mathbb{N}$, такие, что $s_n \uparrow u = \sup\{s \in T \colon s < t\}$ при $n \to \infty$. Заметим, что последовательность $\{s_n\}_{n \ge 1}$ может содержать только конечное число различных чисел. Если $u \notin T$ или $u = t$, то $\{\tau < t\} = \{\tau < u\} = \cup_{n=1}^{\infty}\{\tau \le s_n\} \in \mathcal{F}_t$, так как $\{\tau \le s_n\} \in \mathcal{F}_{s_n} \subseteq \mathcal{F}_t$. Если $t > u \in T$, то $\{\tau < t\} = \{\tau \le u\} \in \mathcal{F}_u \subseteq \mathcal{F}_t$.

Предположим теперь, что $t_* \notin T$. Если $(-\infty, t) \cap T = \varnothing$, то $\{\tau < t\} = \varnothing \in \mathcal{F}_t$. Если $(-\infty, t) \cap T \ne \varnothing$, то снова можно определить величину u и рассуждать уже знакомым образом. ◄

3.6.3. Теорема. *Функция* $\tau \colon \Omega \to T \cup \{\infty\}$ *является марков-*

ским моментом относительно фильтрации $\mathbb{F}_T$ со счетным множеством T, если и только если $\{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t$ для любого $t \in T$.

► Если τ является марковским моментом, то $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$ по теореме 3.6.2, и, следовательно, $\{\tau = t\} = \{\tau \leq t\} \setminus \{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$ для любого $t \in T$. Далее, если $\{\tau = s\} \in \mathcal{F}_s$ для любого $s \in T$, то $\{\tau \leq t\} = \cup_{T \ni s \leq t}\{\tau = s\} \in \mathcal{F}_t$ для любого $t \in T$. ◄

3.6.4. Теорема. *Функция $\tau\colon \Omega \to T \cup \{\infty\}$ является марковским моментом относительно непрерывной справа фильтрации $\mathbb{F}_T$ с выпуклым множеством T тогда и только тогда, когда $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$ для любого $t \in T$ и $\{\tau = \infty\} \in \mathcal{F}_{t^*}$,* если $t^* \in T$.

► Если τ является марковским моментом, то $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$ для любого $t \in T$ по теореме 3.6.2. Если $t^* \in T$, то $\{\tau \leq t^*\} \in \mathcal{F}_{t^*}$, и, следовательно, $\{\tau = \infty\} = \Omega \setminus \{\tau \leq t^*\} \in \mathcal{F}_{t^*}$.

Предположим, что $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$ для всех $t \in T$ и $\{\tau = \infty\} \in \mathcal{F}_{t^*}$, если $t^* \in T$. Если $t^* \in T$, то $\{\tau \leq t^*\} = \Omega \setminus \{\tau = \infty\} \in \mathcal{F}_{t^*}$. Далее, пусть $t \in T$ и $t < t^*$. Так как $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$ для любого $t \in T$, то $\{\tau \leq t\} = \cap_{n \geq 1/(s-t)}\{\tau < t + 1/n\} \in \mathcal{F}_s$ для любого $s \in T$, $s > t$, и, следовательно, $\{\tau \leq t\} \in \cap_{T \ni s > t}\mathcal{F}_s = \mathcal{F}_t$. ◄

3.6.5. Теорема. *Пусть функции $\tau, \sigma\colon \Omega \to T \cup \{\infty\}$ определены на полном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Если τ является марковским моментом относительно расширенной фильтрации $\mathbb{F}_T$ и $\tau = \sigma$ п.в., то σ является $\mathbb{F}_T$-марковским моментом.*

► Множество $A = \{\tau = \sigma\}$ и любая часть его дополнения A^c принадлежат любой сигма-алгебре $\mathcal{F}_t$, $t \in T$, так как $\mathbb{P}\{A^c\} = 0$. Поэтому $\{\tau \leq t\} \cap A \in \mathcal{F}_t$ и $\{\sigma \leq t\} \cap A^c \in \mathcal{F}_t$ и, следовательно, $\{\sigma \leq t\} = (\{\tau \leq t\} \cap A) \cup (\{\sigma \leq t\} \cap A^c) \in \mathcal{F}_t$. ◄

3.6.6. Теорема. *Пусть дан $\mathbb{F}_T$-марковский момент τ. Тогда для любого $t \in T$ функция $\tau \wedge t$ измерима относительно $\mathcal{F}_t$.*

► По теореме 1.5.4 достаточно доказать, что $\{(\tau \wedge t) \leq u\} \in \mathcal{F}_t$ для любого $u \in \mathbb{R}$. Если $t \leq u$, то $\{(\tau \wedge t) \leq u\} = \Omega \in \mathcal{F}_t$.

Предположим теперь, что $u < t$. Если $T \cap (-\infty, u] = \varnothing$, то $\{(\tau \wedge t) \leq u\} = \varnothing \in \mathcal{F}_t$. Далее, если $T \cap (-\infty, u] \neq \varnothing$, то найдутся числа $s_n \in T, n \in \mathbb{N}$, такие, что $s_n \uparrow v = \sup\{s \in T\colon s < u\}$. Последовательность $\{s_n\}_{n \geq 1}$ может содержать только конечное число различных точек. Если $v \in T$, то $\{(\tau \wedge t) \leq u\} = \{\tau \leq v\} \in \mathcal{F}_v \subseteq \mathcal{F}_t$. Если $v \notin T$, то $\{(\tau \wedge t) \leq u\} = \{\tau < v\} = \cup_{n=1}^{\infty}\{\tau \leq s_n\} \in \mathcal{F}_t$. ◄

3.6.7. Теорема. *Если τ и σ являются $\mathbb{F}_T$-марковскими моментами, то функции $\tau \wedge \sigma$ и $\tau \vee \sigma$ также являются $\mathbb{F}_T$-марковскими* *моментами.*

▶ Функции $\tau\wedge\sigma, \tau\vee\sigma\colon \Omega \to T\cup\{\infty\}$ являются $\mathbb{F}_T$-марковскими моментами, так как $\{(\tau \vee \sigma) \le t\} = \{\tau \le t\} \cap \{\sigma \le t\} \in \mathcal{F}_t$ и $\{(\tau \wedge \sigma) \le t\} = \{\tau \le t\} \cup \{\sigma \le t\} \in \mathcal{F}_t$ для любого $t \in T$. ◀

3.6.8. Определение. С каждым $\mathbb{F}_T$-марковским моментом τ связаны две сигма-алгебры $\mathcal{F}_\tau$ и $\mathcal{F}_{\tau-}$. Сигма-алгебра $\mathcal{F}_\tau$ состоит из множеств $A \in \sigma(\mathcal{F}_t, t \in T)$ таких, что $A \cap \{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t$ для любого $t \in T$. Она называется *сигма-алгеброй событий, предшествующих* марковскому моменту τ. Сигма-алгебра $\mathcal{F}_{\tau-}$ порождается множествами $A \cap \{t < \tau\}$ с $t \in T$ и $A \in \mathcal{F}_t$, если $t_* \notin T$. Если $t_* \in T$, то $\mathcal{F}_{\tau-}$ порождается множествами $A \in \mathcal{F}_{t_*}$ и $A \cap \{t < \tau\}$ с $t \in T$ и $A \in \mathcal{F}_t$. Сигма-алгебра $\mathcal{F}_{\tau-}$ называется сигма-алгеброй *событий, строго предшествующих* марковскому моменту τ.

Убедимся, что класс $\mathcal{F}_\tau$ является сигма-алгеброй. Он содержит множества Ω и $\varnothing$. Если $A, A_n \in \mathcal{F}_\tau, n \in \mathbb{N}$, то множества A^c и $\cup_{n=1}^\infty A_n$ принадлежат $\mathcal{F}_\tau$, так как $A^c \cap \{\tau \le t\} = \{\tau \le t\} \setminus (A \cap \{\tau \le t\}) \in \mathcal{F}_t$ и $(\cup_{n=1}^\infty A_n) \cap \{\tau \le t\} = \cup_{n=1}^\infty (A_n \cap \{\tau \le t\}) \in \mathcal{F}_t$ для любого $t \in T$.

3.6.9. Теорема. *Пусть даны $\mathbb{F}_T$-марковские моменты τ и σ.*

(i) $\mathcal{F}_{\tau-} \subseteq \mathcal{F}_\tau$.

(ii) *Если* $\tau \le \sigma$, *то* $\mathcal{F}_\tau \subseteq \mathcal{F}_\sigma$ *и* $\mathcal{F}_{\tau-} \subseteq \mathcal{F}_{\sigma-}$.

(iii) $\mathcal{F}_{\tau\wedge\sigma} = \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma$.

(iv) *Если* $\tau < \sigma$, *то* $\mathcal{F}_\tau \subseteq \mathcal{F}_{\sigma-}$.

(v) $\{\tau \le \sigma\}, \{\tau = \sigma\} \in \mathcal{F}_{\tau\wedge\sigma}, \{\tau < \sigma\} \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_{\sigma-}$.

(vi) *Если* $A \in \mathcal{F}_\tau$, *то* $A \cap \{\tau \le \sigma\}, A \cap \{\tau = \sigma\} \in \mathcal{F}_\sigma$.

(vii) *Если* $A \in \mathcal{F}_\tau$, *то* $A \cap \{\tau < \sigma\} \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_{\sigma-}$.

▶ (i). Достаточно доказать, что все множества, порождающие $\mathcal{F}_{\tau-}$, принадлежат $\mathcal{F}_\tau$. Предположим, например, что $t_* \in T$. Если $A \in \mathcal{F}_{t_*}$, то $A \in \mathcal{F}_\tau$, так как $A \cap \{\tau \le s\} \in \mathcal{F}_s$ для любого $s \in T$. Если $t \in T$ и $A \in \mathcal{F}_t$, то $A \cap \{t < \tau\} \in \mathcal{F}_\tau$. Утверждение является следствием соотношений $(A \cap \{t < \tau\}) \cap \{\tau \le s\} = \varnothing$, если $s \le t$, и $(A \cap \{t < \tau\}) \cap \{\tau \le s\} = (A \cap \{\tau \le s\}) \setminus (A \cap \{\tau \le t\}) \in \mathcal{F}_s$, если $t < s$. Заметим, что попутно был рассмотрен случай $t_* \notin T$.

(ii). Если $A \in \mathcal{F}_\tau$, то $A \cap \{\sigma \le t\} = A \cap \{\tau \le t\} \cap \{\sigma \le t\} \in \mathcal{F}_t$ для любого $t \in T$. Это означает, что $A \in \mathcal{F}_\sigma$ и, следовательно, $\mathcal{F}_\tau \subseteq \mathcal{F}_\sigma$.

Чтобы доказать, что $\mathcal{F}_{\tau-} \subseteq \mathcal{F}_{\sigma-}$, достаточно убедиться, что все множества, порождающие $\mathcal{F}_{\tau-}$, принадлежат $\mathcal{F}_{\sigma-}$. Если $t \in T$ и $A \in \mathcal{F}_t$, то $A \cap \{t < \tau\} = A \setminus (A \cap \{\tau \le t\}) \in \mathcal{F}_t$ и, следовательно, $A \cap \{t < \tau\} = (A \cap \{t < \tau\}) \cap \{t < \sigma\} \in \mathcal{F}_{\sigma-}$.

(iii). В силу (ii) справедливо включение $\mathcal{F}_{\tau\wedge\sigma} \subseteq \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma$. Поэтому достаточно доказать, что $\mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma \subseteq \mathcal{F}_{\tau\wedge\sigma}$. Если $A \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma$, то $A \cap \{(\tau \wedge \sigma) \leq t\} = (A \cap \{\tau \leq t\}) \cup (A \cap \{\sigma \leq t\}) \in \mathcal{F}_t$ для любого $t \in T$ и, следовательно, $A \in \mathcal{F}_{\tau\wedge\sigma}$.

(iv). Возьмем любое счетное, всюду плотное множество $S' \subseteq T$. Добавим к S' те из точек t_* и t^*, которые принадлежат T. Обозначим $S = S' \cup (\mathbb{Q} \cap T)$. Пусть $A \in \mathcal{F}_\tau$ и $s \in S$. Так как $A \cap \{\tau \leq s\} \in \mathcal{F}_s$, то $A \cap \{\tau \leq s\} \cap \{s < \sigma\} \in \mathcal{F}_{\sigma-}$. Заметим, что $A = A \cap \{\tau < \sigma\}$. Множество A принадлежит сигма-алгебре $\mathcal{F}_{\sigma-}$, так как является объединением $A = \cup_{s\in S}(A \cap \{\tau \leq s\}) \cap \{s < \sigma\}$ счетного числа множеств из $\mathcal{F}_{\sigma-}$.

(v). По теореме 3.6.6 для любого $t \in T$ функции $\tau \wedge t$ и $\sigma \wedge t$ измеримы относительно сигма-алгебры $\mathcal{F}_t$. Поэтому множество $\{(\tau \wedge t) \leq (\sigma \wedge t)\}$ принадлежит $\mathcal{F}_t$. Множества $\{\tau \leq t\}$ и $\{\sigma \leq t\}$ принадлежат $\mathcal{F}_t$ и, следовательно,

$$\{\tau \leq \sigma\} \cap \{\sigma \leq t\} = \{(\tau \wedge t) \leq (\sigma \wedge t)\} \cap \{\tau \leq t\} \cap \{\sigma \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Тем самым доказано, что $A \cap \{\tau \leq \sigma\} \in \mathcal{F}_\sigma$. Аналогично из равенства $\{\tau \leq \sigma\} \cap \{\tau \leq t\} = \{(\tau \wedge t) \leq (\sigma \wedge t)\} \cap \{\tau \leq t\}$ следует, что $\{\tau \leq \sigma\} \in \mathcal{F}_\tau$ и, следовательно, $\{\tau \leq \sigma\} \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma = \mathcal{F}_{\tau\wedge\sigma}$. В этих рассуждениях функции τ и σ можно поменять ролями и доказать, что $\{\sigma \leq \tau\} \in \mathcal{F}_{\tau\wedge\sigma}$. Множества $\{\tau = \sigma\} = \{\tau \leq \sigma\} \cap \{\sigma \leq \tau\}$ и $\{\tau < \sigma\} = \{\tau \leq \sigma\} \setminus \{\tau = \sigma\}$ принадлежат σ-алгебре $\mathcal{F}_{\tau\wedge\sigma}$.

Осталось доказать, что $\{\tau < \sigma\} \in \mathcal{F}_{\sigma-}$. С этой целью возьмем множество $S \subseteq T$, о котором шла речь выше в пункте (iv). Множество $\{\tau < \sigma\} = \cup_{s\in S}\{\tau \leq s\} \cap \{s < \sigma\}$, будучи объединением не более счетного числа множеств из $\mathcal{F}_{\sigma-}$, принадлежит $\mathcal{F}_{\sigma-}$.

(vi). По доказанному в (v) множество $\{\tau \leq \sigma\}$ принадлежит $\mathcal{F}_\tau$. Так как $A \in \mathcal{F}_\tau$, то $(A \cap \{\tau \leq \sigma\}) \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ для любого $t \in T$. Множество $\{\sigma \leq t\}$ также принадлежит $\mathcal{F}_t$. Отсюда следует, что $(A \cap \{\tau \leq \sigma\}) \cap \{\sigma \leq t\} = (A \cap \{\tau \leq \sigma\} \cap \{\tau \leq t\})) \cap \{\sigma \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ для любого $t \in T$. Это означает, что $A \cap \{\tau \leq \sigma\} \in \mathcal{F}_\sigma$. В силу (v) множество $\{\tau < \sigma\}$ принадлежит $\mathcal{F}_\sigma$. Поэтому $A \cap \{\tau = \sigma\} \in \mathcal{F}_\sigma$ и $A \cap \{\tau < \sigma\} = (A \cap \{\tau \leq \sigma\}) \cap \{\tau < \sigma\} \in \mathcal{F}_\sigma$. Отсюда следует, что $A \cap \{\tau = \sigma\} = (A \cap \{\tau \leq \sigma\}) \setminus (A \cap \{\tau < \sigma\}) \in \mathcal{F}_\sigma$.

(vii). $A \cap \{\tau < \sigma\} \in \mathcal{F}_\tau$ в силу (v). Возьмем счетное множество $S \subset T$ из (iv). Так как $A \cap \{\tau \leq s\}) \cap \{s < \sigma\} \in \mathcal{F}_{\sigma-}$ для любого $s \in S$, то $A \cap \{\tau < \sigma\} = \cup_{s\in S}(A \cap \{\tau \leq s\}) \cap \{s < \sigma\} \in \mathcal{F}_{\sigma-}$. ◄

3.6.10. Теорема. *Любой* $\mathbb{F}_T$*-марковский момент* τ *измерим относительно* σ*-алгебры* $\mathcal{F}_{\tau-}$.

▶ По теореме 1.5.4 достаточно доказать, что $\{u < \tau\} \in \mathcal{F}_{\tau-}$ для любого $u \in \mathbb{R}$. Возможны два случая $t_* \in T$ и $t_* \notin T$. Предположим, например, что $t_* \in T$. Если $u < t_*$, то $\{u < \tau\} = \Omega \in \mathcal{F}_{\tau-}$. Если $u = t_*$, то $\{u < \tau\} = \Omega \setminus \{\tau \leq u\} \in \mathcal{F}_{t_*} \subseteq \mathcal{F}_{\tau-}$. Если $t_* < u \in T$, то $\{u < \tau\} = \Omega \cap \{u < \tau\} \in \mathcal{F}_{\tau-}$. Предположим теперь, что $t_* < u$ и $u \notin T$. Обозначим $v = \sup\{s \in T\colon s < u\}$. Если $v \in T$, то $\{u < \tau\} = \{v < \tau\} = \Omega \cap \{v < \tau\} \in \mathcal{F}_{\tau-}$. Если $v \notin T$, найдется возрастающая последовательность $\{s_n\}_{n\geq 1}$ чисел из T, которая сходится к v. Последовательность $\{s_n\}_{n\geq 1}$ может содержать только конечное число различных чисел. По доказанному выше для любого $n \in \mathbb{N}$ множество $\{\tau \leq s_n\}$ принадлежит $\mathcal{F}_{\tau-}$ и, следовательно, $\{\tau \leq u\} = \{\tau < v\} = \cup_{n=1}^{\infty}\{\tau \leq s_n\} \in \mathcal{F}_{\tau-}$. ◀

3.6.11. Теорема. *Пусть даны марковский момент* τ *относительно фильтрации* $\mathbb{F}_T$ *и* $\mathcal{F}_\tau$*-измеримая функция* $\sigma\colon \Omega \to T \cup \{\infty\}$. (i) *Если* $\tau \leq \sigma$, *то* σ *является* $\mathbb{F}_T$*-марковским моментом.* (ii) *Для любого множества* $A \in \mathcal{F}_\tau$ *функция* $\tau_A = \tau\mathbb{1}_A + \infty\mathbb{1}_{A^c}$ *является* $\mathbb{F}_T$*-марковским моментом.*

▶ (i). Заметим, что $\{\sigma \leq t\} \in \mathcal{F}_\tau$ и $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ для любого $t \in T$. Так как $\tau \leq \sigma$, то $\{\sigma \leq t\} = \{\sigma \leq t\} \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ для любого $t \in T$. Это означает, что σ является $\mathbb{F}_T$-марковским моментом.

(ii). Функция τ_A является $\mathbb{F}_T$-марковским моментом в силу (i), так как она $\mathcal{F}_\tau$-измерима и удовлетворяет неравенству $\tau \leq \tau_A$. ◀

3.6.12. Теорема. *Для любого марковского момента* τ *относительно фильтрации* $\mathbb{F}_T$ *с выпуклым множеством* T *существуют* $\mathbb{F}_T$*-марковские моменты* $\tau_n, n \in \mathbb{N}$, *такие, что каждый из них принимает конечное число значений и* $\tau_n \downarrow \tau$.

▶ Можно считать, что множество T содержит более одной точки. Пусть $T \ni a_n \downarrow t_*$ при $n \uparrow \infty$. Если $t_* \in T$, то следует положить $a_n = t_*$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Пусть $T \ni b_n \uparrow t^*$ при $n \uparrow \infty$. Если $t^* \in T$, то следует положить $b_n = t^*$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Разобьем сегмент $[a_n, b_n]$ точками $a_n = t_{n,0} < t_{n,1} < \cdots < t_{n,m_n} = b_n$ таким образом, чтобы $\{t_{n,k}, k = 0, \ldots, m_n\} \subset \{t_{n+1,k}, k = 0, \ldots, m_{n+1}\}$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{1\leq k\leq m_n} (t_{n,k} - t_{n,k-1}) = 0$. Определим функцию $\vartheta_n(t)$ на множестве $t \in T \cup [t^*, \infty]$, положив $\vartheta_n(t) = a_n$, если $t \in T, t \leq a_n$, $\vartheta_n(t) = t_{n,k}$, если $t \in (t_{n,k-1}, t_{n,k}]$ для некоторого $k = 1, \ldots, m_n$, $\vartheta_n(t) = \infty$, если $t > b_n$. Заметим, что функция ϑ_n возрастает и

$\vartheta_n(t) \geq t$ для любого $t \in T \cup [t^*, \infty]$. Кроме того, $\vartheta_{n+1}(t) \leq \vartheta_n(t)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \vartheta_n(t) = t$. По теореме 3.6.10 марковский момент τ измерим относительно σ-алгебры $\mathcal{F}_\tau$. Суперпозиция $\tau_n = \vartheta_n(\tau)$ измерима относительно $\mathcal{F}_\tau$ и удовлетворяет неравенству $\tau_n = \vartheta_n(\tau) \geq \tau$. По теореме 3.6.11 функция τ_n является $\mathbb{F}_T$-марковским моментом. Она принимает конечное число значений. Из свойств функций ϑ_n, $n \in \mathbb{N}$, следует, что $\tau_{n+1} \leq \tau_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_n = \tau$. ◀

3.6.13. Теорема. *Пусть даны марковские моменты* $\tau_n, n \in \mathbb{N}$, *относительно фильтрации* $\mathbb{F}_T$. *Если последовательность* $\{\tau_n\}_{n\geq 1}$ *убывает и для любого* $\omega \in \Omega$ *существует* $m = m(\omega) \in \mathbb{N}$ *такое, что* $\tau_n(\omega) = \tau_m(\omega)$ *для всех* $n \in \mathbb{N}, n \geq m$, *то функция* $\tau = \lim_{n\to\infty} \tau_n$ *является* $\mathbb{F}_T$*-марковским моментом.*

► Для любых $t \in T$ и $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $\tau \leq \tau_n$ и, следовательно, $\{\tau \leq t\} \subseteq \cap_{n=1}^\infty \{\tau_n \leq t\}$. По условию для любого $\omega \in \cap_{n=1}^\infty \{\tau_n \leq t\}$ найдется $m = m(\omega) \in \mathbb{N}$ такое, что $\tau_n(\omega) = \tau_m(\omega)$ для всех $n \in \mathbb{N}, n \geq m$, и, следовательно, $\tau(\omega) = \tau_m(\omega) \leq t$. Отсюда следует, что $\{\tau \leq t\} = \cap_{n=1}^\infty \{\tau_n \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. ◀

3.6.14. Теорема. *Пусть даны марковские моменты* $\tau_n, n \in \mathbb{N}$, *относительно фильтрации* $\mathbb{F}_T$. *Если* $\sup_{n\geq 1} t_n \in T \cup \{\infty\}$ *для любых* $t_n \in T, n \in \mathbb{N}$, *то функция* $\tau = \sup_{n\geq 1} \tau_n$ *является* $\mathbb{F}_T$*-марковским моментом и* $\cup_{n=1}^\infty \mathcal{F}_{\tau_n} \subseteq \mathcal{F}_\tau$.

► Функция τ является марковским моментом относительно фильтрации $\mathbb{F}_T$, так как $\{\tau \leq t\} = \cap_{n=1}^\infty \{\tau_n \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ для любого $t \in T$. Так как $\tau_n \leq \tau$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то $\cup_{n=1}^\infty \mathcal{F}_{\tau_n} \subseteq \mathcal{F}_\tau$ по теореме 3.6.9. ◀

3.6.15. Теорема. *Пусть даны марковские моменты* $\tau_n, n \in \mathbb{N}$, *относительно фильтрации* $\mathbb{F}_T$. *Если* $T = \mathbb{N}$ *или, если* $T = [a, b]$ *или* $T = [a, \infty)$ *и фильтрация* $\mathbb{F}_T$ *непрерывна справа, то функции*

$$\limsup_{n\to\infty} \tau_n, \liminf_{n\to\infty} \tau_n, \sup_{n\geq 1} \tau_n, \inf_{n\geq 1} \tau_n \tag{3.6.1}$$

являются $\mathbb{F}_T$*-марковскими моментами и* $\mathcal{F}_{\inf_{n\geq 1} \tau_n} = \cap_{n=1}^\infty \mathcal{F}_{\tau_n}$.

► (i). Предположим, что $T = \mathbb{N}$. По теореме 3.6.14 функция $\sup_{n\geq 1} \tau_n$ является марковским моментом. Функция $\tau = \inf_{n\geq 1} \tau_n$ также является марковским моментом относительно фильтрации $\mathbb{F}_T$, так как $\{\tau \leq t\} = \cup_{n=1}^\infty \{\tau_n \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ для любого $t \in \mathbb{N}$. Отсюда следует, что другие две функции $\limsup_{n\to\infty} \tau_n = \inf_{k\geq 1} \sup_{n\geq k} \tau_n$ и $\liminf_{n\to\infty} \tau_n = \sup_{k\geq 1} \inf_{n\geq k} \tau_n$ являются марковскими моментами.

Обозначим $\tau = \inf_{n\geq 1}\tau_n$. Возьмем любое $A \in \cap_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}_{\tau_n}$. Так как $A\cap\{\tau \leq t\} = \cup_{n=1}^{\infty}A\cap\{\tau_n \leq t\}$ и $A\cap\{\tau_n \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ для любых $n, t \in \mathbb{N}$, то $A\cap\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, и, следовательно, $\cap_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}_{\tau_n} \subseteq \mathcal{F}_\tau$. Так как $\mathcal{F}_\tau \subseteq \cap_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}_{\tau_n}$ по теореме 3.6.9, то выполняется требуемое равенство $\cap_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}_{\tau_n} = \mathcal{F}_\tau$.

(ii). Предположим теперь, что $T = [a,b]$ или $T = [a,\infty)$ для некоторых $a, b \in \mathbb{R}$ и фильтрация $\mathbb{F}_T$ непрерывна справа. По теореме 3.6.14 функция $\sup_{n\geq 1}\tau_n$ является марковским моментом. Функция $\tau = \inf_{n\geq 1}\tau_n$ является марковским моментом по теореме 3.6.4, так как $\{\tau < t\} = \cup_{n=1}^{\infty}\{\tau_n < t\} \in \mathcal{F}_t$ для любого $t \in T$ и $\{\inf_{n\geq 1}\tau_n = \infty\} = \cap_{n=1}^{\infty}\{\tau_n = \infty\} \in \mathcal{F}_{t^*}$, если $t^* \in T$. Отсюда следует, что все функции (3.6.1) являются $\mathbb{F}_T$-марковскими моментами. Снова можно убедиться, что $\mathcal{F}_\tau \subseteq \cap_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}_{\tau_n}$. Пусть $A \in \cap_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}_{\tau_n}$. Так как $A\cap\{\tau_n \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ для любых $n \in \mathbb{N}$ и $t \in T$, а также $\{\tau_n < t\} \in \mathcal{F}_t$ по теореме 3.6.2, то $A\cap\{\tau_n < t\} = A\cap\{\tau_n \leq t\}\cap\{\tau_n < t\} \in \mathcal{F}_t$. Отсюда и из равенства $A\cap\{\tau < t\} = \cup_{n=1}^{\infty}A\cap\{\tau_n < t\}$ следует, что $A\cap\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$. Пусть $t \in T, t < t^* = \sup\{t\colon t \in T\}$. Найдется $m \in \mathbb{N}$ такое, что $t + 1/m < t^*$. Так как фильтрация $\mathbb{F}_T$ непрерывна справа, то $A\cap\{\tau \leq t\} = \cap_{n=m}^{\infty}A\cap\{\tau < t + 1/n\} \in \mathcal{F}_t$. Если $T = [a,b]$ и $t = b$, то $A\cap\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, так как $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ и $A \in \mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{F}_s, s \in [a,b]\}$. Тем самым доказано, что $A \in \mathcal{F}_\tau$. Это означает, что $\cap_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}_{\tau_n} \subseteq \mathcal{F}_\tau$ и, следовательно, $\cap_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}_{\tau_n} = \mathcal{F}_\tau$. ◄

3.6.16. Задача. Пусть даны марковские моменты τ и σ относительно фильтрации $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\colon \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}, t \geq 0\}$. Доказать, что функция $\tau + \sigma$ является $\mathbb{F}_T$-марковским моментом.

3.7. Предсказуемые марковские моменты

Среди всех марковских моментов выделяют специальный класс марковских моментов, называемых предсказуемыми. Без них невозможно изучить целый ряд глубоких свойств случайных процессов. Предполагается, что даны вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и фильтрация $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\colon \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}, t \geq 0\}$. В качестве параметрического множества выступает положительная полупрямая.

3.7.1. Определение. Функция $\tau\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ называется *предсказуемым* $\mathbb{F}$-марковским моментом или *предсказуемым* марковским моментом относительно фильтрации $\mathbb{F}$, если существует возрастающая последовательность $\{\tau_n\}_{n\geq 1}$ марковских моментов относительно $\mathbb{F}$, которая сходится к τ, и для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $\tau_n < \tau$ на множестве $\{0 < \tau\}$. Последовательность $\{\tau_n\}_{n \geq 1}$ называется *предвещающей* для τ.

Если ясно, о какой фильтрации идет речь, то упоминание о фильтрации будет иногда опускаться.

3.7.2. Пример. (i) Функция $\tau_A = \alpha \mathbb{1}_A + \infty \mathbb{1}_{A^c}$ для любых $\alpha \geq 0$ и $A \in \mathcal{F}_\alpha$ является предсказуемым $\mathbb{F}$-марковским моментом.
(ii) Сумма $\tau + \sigma$ любого $\mathbb{F}$-марковского момента τ и любого предсказуемого $\mathbb{F}$-марковского момента $\sigma > 0$ является предсказуемым марковским моментом относительно $\mathbb{F}$.

(i). По теореме 3.6.11 функция τ_A является марковским моментом. Предположим, что $\alpha > 0$. Возьмем возрастающую последовательность $\{\alpha_n\}_{n \geq 1}$ чисел $0 \leq \alpha_n < \alpha$, сходящуюся к α. Обозначим $\tau_n = \alpha_n \mathbb{1}_A + \infty \mathbb{1}_{A^c}$. Последовательность $\{\tau_n \wedge n\}_{n \geq 1}$ марковских моментов предвещает τ_A. Если $\alpha = 0$, то последовательность $\{\tau_A \wedge n\}_{n \geq 1}$ марковских моментов предвещает τ_A.

(ii). Возьмем любую предвещающую последовательность $\{\sigma_n\}_{n \geq 1}$ для σ. Сумма $\tau + \sigma_m$ является $\mathbb{F}$-марковским моментов по задаче 3.6.16. Последовательность $\{\tau + \sigma_n\}_{n \geq 1}$ предвещает $\tau + \sigma$.

3.7.3. Пример. Пусть дан $\mathbb{F}$-согласованный, непрерывный, вещественный случайный процесс $X = \{X_t, t \geq 0\}$. Тогда для любого $c \in \mathbb{R}$ функция $\tau = \inf\{t \geq 0\colon X_t \geq c\}$ является предсказуемым $\mathbb{F}$-марковским моментом.

Функция τ является $\mathbb{F}$-марковским моментом, так как

$$\{\tau \leq t\} = \{X_t = c\} \cup \left(\cap_{n=1}^{\infty} \cup_{s \in \mathbb{Q} \cap [0,t)} \{X_s > c - 1/n\}\right) \in \mathcal{F}_t$$

для любого $t \in \mathbb{R}_+$. Убедимся, что выполняется равенство

$$X_{\tau(\omega)}(\omega) = c, \text{ если } 0 < \tau(\omega) < \infty. \tag{3.7.1}$$

С этой целью заметим, что выполняются неравенства $X_s(\omega) < c$ для любого $0 \leq s < \tau(\omega)$ и $X_{s_m}(\omega) \geq c$ для некоторой последовательности $\{s_m\}_{m \geq 1}$ чисел $\tau(\omega) \leq s_n \to \tau(\omega)$ при $m \to \infty$. Так как траектория $X_t(\omega), t \geq 0$, непрерывна, то $X_{\tau(\omega)}(\omega) = c$.

По аналогии с τ для каждого $n \in \mathbb{N}$ можно построить функцию $\tau_n = \inf\{t \geq 0\colon X_t \geq c - 1/n\}$. Заметим, что $\tau_n \leq \tau_{n+1} \leq \tau$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Докажем неравенство $\tau_n < \tau$ на множестве $\{0 < \tau < \infty\}$. Если $0 < \tau_n(\omega) = \tau(\omega) < \infty$ для некоторых $n \in \mathbb{N}$ и $\omega \in \Omega$, то

$c = X_{\tau(\omega)}(\omega) = X_{\tau_n(\omega)}(\omega) = c - 1/n$. Равенство $c = c - 1/n$ лишено смысла, и, следовательно, $\tau_n(\omega) < \tau(\omega)$.

Докажем, что $\lim_{n\to\infty} \tau_n = \tau$. Если $\tau(\omega) = 0$ для некоторого $\omega \in \Omega$, то $\tau_n(\omega) = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Если $\lim_{n\to\infty} \tau_n(\omega) = s < \infty$ и $\tau(\omega) = \infty$ для некоторого $\omega \in \Omega$, то

$$c > X_s(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_{\tau_n(\omega)}(\omega) = \lim_{n\to\infty} (c - 1/n) = c.$$

Неравенство $c > c$ лишено смысла и, следовательно, $\lim_{n\to\infty} \tau_n = \tau$. Если $0 < \tau(\omega) < \infty$ и $s = \lim_{n\to\infty} \tau_n(\omega) < \tau(\omega)$, то

$$c > X_s(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_{\tau_n(\omega)}(\omega) = \lim_{n\to\infty} (c - 1/n) = c = X_{\tau(\omega)}(\omega).$$

Неравенство $c > c$ лишено смысла. Поэтому имеет место сходимость $s = \lim_{n\to\infty} \tau_n(\omega) = \tau(\omega)$. Последовательность $\mathbb{F}$-марковских моментов $\sigma_n = \tau_n \wedge n, n \in \mathbb{N}$, является предвещающей для τ.

3.7.4. Теорема. *Любой предсказуемый $\mathbb{F}_T$-марковский момент τ является $\mathbb{F}_T$-марковским моментом, и $\mathcal{F}_{\tau-} = \sigma(\cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_{\tau_n})$ для любой предвещающей последовательности $\{\tau_n\}_{n\geq 1}$ для τ.*

▶ Функция τ является марковским моментом относительно фильтрации $\mathbb{F}_T$, так как $\{\tau \leq t\} = \cap_{n=1}^{\infty} \{\tau_n \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ для любого $t \in \mathbb{R}_+$. Чтобы доказать второе утверждение, достаточно убедиться, что $\mathcal{F}_{\tau-} \subseteq \sigma(\cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_{\tau_n})$ и $\sigma(\cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_{\tau_n}) \subseteq \mathcal{F}_{\tau-}$. Докажем сначала первое включение $\mathcal{F}_{\tau-} \subseteq \sigma(\cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_{\tau_n})$. Для этого достаточно доказать, что все множества, которые порождают $\mathcal{F}_{\tau-}$, принадлежат $\sigma(\cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_{\tau_n})$. Так как $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_{\tau_n -}$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то $\mathcal{F}_0 \subseteq \sigma(\cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_{\tau_n})$. Пусть $A \in \mathcal{F}_t$ для некоторого $t > 0$. Докажем, что $A \cap \{t < \tau\} \in \sigma(\cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_{\tau_n})$. В силу равенства

$$A \cap \{t < \tau\} = \cup_{m=1}^{\infty} \cap_{n=m}^{\infty} (A \cap \{t \leq \tau_n < \tau\}) \tag{3.7.2}$$

достаточно доказать, что $A \cap \{t \leq \tau_n < \tau\} \in \sigma(\cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_{\tau_n})$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Заметим, что $A \cap \{t \leq \tau_n < \tau\} = (A \cap \{t \leq \tau_n\}) \cap \{\tau_n < \tau\}$ и $\{\tau_n < \tau\} \in \mathcal{F}_{\tau_n}$ по теореме 3.6.9. Убедимся, что $A \cap \{t \leq \tau_n\} \in \mathcal{F}_{\tau_n}$. Для этого достаточно убедиться, что $(A \cap \{t \leq \tau_n\}) \cap \{\tau_n \leq s\} \in \mathcal{F}_s$ для любого $s \in \mathbb{R}_+$. Если $s < t$, то $(A \cap \{t \leq \tau_n\}) \cap \{\tau_n \leq s\} = \varnothing \in \mathcal{F}_s$. Если $t \leq s$, то $A \in \mathcal{F}_s$ и $\{t \leq \tau_n \leq s\} \in \mathcal{F}_s$ и $A \cap \{t \leq \tau_n \leq s\} \in \mathcal{F}_s$.

Докажем, что $\sigma(\cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_{\tau_n}) \subseteq \mathcal{F}_{\tau-}$. Для этого достаточно доказать, что $\mathcal{F}_{\tau_n} \subseteq \mathcal{F}_{\tau-}$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Фиксируем $n \in \mathbb{N}$ и возьмем любое множество $A \in \mathcal{F}_{\tau_n}$. Представим A в следующем виде

$$A = (A \cap \{0 < \tau\}) \cup (A \cap \{\tau = 0\}). \tag{3.7.3}$$

Заметим, что $\{\tau = 0\} \in \mathcal{F}_0, \tau_n \le \tau$ и $A \cap \{\tau_n = 0\} \in \mathcal{F}_0$, и, следовательно, $A \cap \{\tau = 0\} = (A \cap \{\tau_n = 0\}) \cap \{\tau = 0\} \in \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_{\tau-}$. В силу (3.7.3) множество A принадлежит $\mathcal{F}_{\tau-}$, если $A \cap \{0 < \tau\} \in \mathcal{F}_{\tau-}$. В силу равенства

$$A \cap \{0 < \tau\} = \cup_{r=n}^{\infty} \cap_{m=r}^{\infty} (A \cap \{0 \le \tau_m < \tau\})$$

достаточно доказать, что $A \cap \{0 \le \tau_m < \tau\} \in \mathcal{F}_{\tau-}$ для любого $m \in \mathbb{N}$, $m \ge n$. С этой целью заметим, что

$$A \cap \{0 \le \tau_m < \tau\} = \cup_{s \in (\mathbb{Q} \cap T) \cup \{0\}} (A \cap \{0 \le \tau_m \le s\}) \cap \{s < \tau\}$$

и $A \cap \{0 \le \tau_m \le s\} \in \mathcal{F}_s$. Множество $A \cap \{0 \le \tau_m < \tau\}$ принадлежит $\mathcal{F}_{\tau-}$, так как является объединением счетного числа множеств из $\mathcal{F}_{\tau-}$. Тем самым доказано, что $A \in \mathcal{F}_{\tau-}$ и $\mathcal{F}_{\tau_n} \subseteq \mathcal{F}_{\tau-}$. ◀

3.7.5. Теорема. *Если функции* $\tau, \sigma \colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *являются предсказуемыми* $\mathbb{F}_T$*-марковскими моментами, то* : (i) *функции* $\tau \wedge \sigma$ *и* $\tau \vee \sigma$ *являются предсказуемыми* $\mathbb{F}_T$*-марковскими моментами;*
(ii) $\{\tau \le \sigma\}, \{\tau < \sigma\}, \{\sigma \le \tau\}, \{\sigma < \tau\}, \{\tau = \sigma\} \in \mathcal{F}_{\tau-} \cap \mathcal{F}_{\sigma-}$;
(iii) $A \cap \{\tau \le \sigma\}, A \cap \{\tau < \sigma\}, A \cap \{\tau = \sigma\} \in \mathcal{F}_{\tau-} \cap \mathcal{F}_{\sigma-}$ *для любого множества* $A \in \mathcal{F}_{\tau-}$.

▶ Пусть последовательности $\{\tau_n\}_{n \ge 1}$ и $\{\sigma_n\}_{n \ge 1}$ предвещают соответственно τ и σ. (i). По теореме 3.6.7 функции $\tau_n \wedge \sigma_n$ и $\tau_n \vee \sigma_n$ являются $\mathbb{F}_T$-марковскими моментами. Нетрудно видеть, что последовательности $\{\tau_n \wedge \sigma_n\}_{\ge 1}$ и $\{\tau_n \vee \sigma_n\}_{\ge 1}$ предвещают $\tau \wedge \sigma$ и $\tau \vee \sigma$.

(ii). Докажем равенство $\{\tau \le \sigma\} = \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{m=1}^{\infty} \{\tau_n \le \sigma_m\}$. Пусть $\omega \in \{\tau \le \sigma\}$. Если $\tau(\omega) < \sigma(\omega)$, то найдется $m = m(\omega) \in \mathbb{N}$ такое, что $\tau(\omega) < \sigma_m(\omega)$, так как $\lim_{n\to\infty} \sigma_m(\omega) = \sigma(\omega)$. Так как $\tau_n \le \tau$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то выполняется неравенство $\tau_n(\omega) < \sigma_m(\omega)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Если $0 < \tau(\omega) = \sigma(\omega)$, то $\tau_n(\omega) < \tau(\omega) = \sigma(\omega)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. По условию теоремы для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется $m = m_n(\omega) \in \mathbb{N}$ такое, что $\tau_n(\omega) < \sigma_m(\omega) < \sigma(\omega) = \tau(\omega)$. Если $0 = \tau(\omega) = \sigma(\omega)$, то $0 = \tau_n(\omega) = \sigma_n(\omega)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тем самым доказано, что $\omega \in \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{m=1}^{\infty} \{\tau_n \le \sigma_m\}$. Предположим теперь, что точка ω принадлежит множеству $\cap_{n=1}^{\infty} \cup_{m=1}^{\infty} \{\tau_n \le \sigma_m\}$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется $m = m_n(\omega) \in \mathbb{N}$ такое, что $\tau_n(\omega) \le \sigma_{m_n}(\omega) \le \sigma(\omega)$. Отсюда следует, что $\tau(\omega) \le \sigma(\omega)$, то есть $\omega \in \{\tau \le \sigma\}$. Тем самым требуемое равенство $\{\tau \le \sigma\} = \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{m=1}^{\infty} \{\tau_n \le \sigma_m\}$ доказано.

Заметим, что $\{\tau_n \le \sigma_m\} \in \mathcal{F}_{\tau_n} \cap \mathcal{F}_{\sigma_m} \subseteq \mathcal{F}_{\tau-} \cap \mathcal{F}_{\sigma-}$. Эти соотношения выполняются в силу теорем 3.6.9 и 3.7.4. Поэтому

$\{\tau \le \sigma\} = \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{m=1}^{\infty} \{\tau_n \le \sigma_m\} \in \mathcal{F}_{\tau-} \cap \mathcal{F}_{\sigma-}$. В этих рассуждениях τ и σ можно поменять ролями и доказать, что $\{\sigma \le \tau\} \in \mathcal{F}_{\tau-} \cap \mathcal{F}_{\sigma-}$. Отсюда следует, что множество $\{\tau = \sigma\} = \{\tau \le \sigma\} \cap \{\sigma \le \tau\}$, а также множества $\{\tau < \sigma\}$ и $\{\sigma < \tau\}$ принадлежат $\mathcal{F}_{\tau-} \cap \mathcal{F}_{\sigma-}$.

(iii). По доказанному в (ii) для любого $A \in \mathcal{F}_{\tau-}$ пересечения $A \cap \{\tau \le \sigma\}, A \cap \{\tau < \sigma\}, A \cap \{\tau = \sigma\}$ принадлежат сигма-алгебре $\mathcal{F}_{\tau-}$. Поэтому достаточно доказать, что все эти множества принадлежат сигма-алгебре $\mathcal{F}_{\sigma-}$. Выше было доказано равенство $\{\tau \le \sigma\} = \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{m=1}^{\infty} \{\tau_n \le \sigma_m\}$. Поэтому

$$A \cap \{\tau \le \sigma\} = \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{m=1}^{\infty} (A \cap \{\tau_n \le \sigma_m\})$$

для любого $A \subseteq \Omega$. Если $A \in \cup_{r=1}^{\infty} \mathcal{F}_{\tau_r}$, то $A \in \mathcal{F}_{\tau_r}$ для некоторого $r \in \mathbb{N}$. По теореме 3.6.9 мы имеем, что $A \cap \{\tau_r \le \sigma_m\} \in \mathcal{F}_{\sigma_m}$ для любого $m \in \mathbb{N}$, и, следовательно, $A \cap \{\tau \le \sigma\} \in \sigma(\cup_{m=1}^{\infty} \mathcal{F}_{\sigma_m}) = \mathcal{F}_{\sigma-}$ по теореме 3.7.4. Обозначим класс $\mathcal{L}$ множеств $A \in \mathcal{F}_{\tau-}$, для которых $A \cap \{\tau \le \sigma\} \in \mathcal{F}_{\sigma-}$. Нетрудно проверить, что $\mathcal{L}$ является σ-алгеброй. Так как $\cup_{r=1}^{\infty} \mathcal{F}_{\tau_r} \subseteq \mathcal{L}$, то $\mathcal{F}_{\tau-} = \sigma(\cup_{r=1}^{\infty} \mathcal{F}_{\tau_r}) \subseteq \mathcal{L} \subseteq \mathcal{F}_{\tau-}$. Тем самым доказано, что $A \cap \{\tau \le \sigma\} \in \mathcal{F}_{\sigma-}$ для любого $A \in \mathcal{F}_{\tau-}$. Далее, по теореме 3.6.9 множество $A \cap \{\tau < \sigma\}$ принадлежит $\mathcal{F}_{\sigma-}$. Отсюда следует, что $A \cap \{\tau = \sigma\} = (A \cap \{\tau \le \sigma\}) \setminus (A \cap \{\tau < \sigma\}) \in \mathcal{F}_{\sigma-}$. ◄

3.7.6. Теорема. *Пусть даны предсказуемые* $\mathbb{F}$*-марковские моменты* $\tau_n, n \in \mathbb{N}$. (i) *Если последовательность* $\{\tau_n\}_{n \ge 1}$ *возрастает, то функция* $\tau = \lim_{n\to\infty} \tau_n$ *является* $\mathbb{F}$*-предсказуемым марковским моментом.* (ii) *Если последовательность* $\{\tau_n\}_{n \ge 1}$ *убывает и для любого* $\omega \in \Omega$ *существует* $m = m(\omega) \in \mathbb{N}$ *такое, что* $\tau_n(\omega) = \tau_m(\omega)$ *для всех* $n \in \mathbb{N}, n \ge m$, *то функция* $\tau = \lim_{n\to\infty} \tau_n$ *является предсказуемым* $\mathbb{F}$*-марковским моментом.*

► (i). Обозначим $\{\tau_{n,m}\}_{m \ge 1}$ предвещающую последовательность для τ_n и $\sigma_m = \max\{\tau_{1,m}, \ldots, \tau_{m,m}\}$. В силу теорем 3.6.7 и 3.6.14 функции σ_m и $\tau = \lim_{n\to\infty} \tau_n$ являются $\mathbb{F}$-марковскими моментами. Докажем, что последовательность $\{\sigma_m\}_{m \ge 1}$ предвещает τ.

Из неравенств $\sigma_m \le \max\{\tau_{1,m+1}, \ldots, \tau_{m,m+1}\} \le \sigma_{m+1}$ следует, что последовательность $\{\sigma_m\}_{m \ge 1}$ возрастает. Докажем, что последовательность $\{\sigma_m\}_{m \ge 1}$ сходится к τ. Так как $\tau_{1,m} \le \tau_1, \ldots, \tau_{m,m} \le \tau_m$ и $\tau_1 \le \cdots \le \tau_m$, то $\sigma_m \le \tau_m \le \tau$ и, следовательно, $\lim_{m\to\infty} \sigma_m \le \tau$. Возьмем произвольное элементарное событие $\omega \in \Omega$. Если $\tau(\omega) = 0$, то $\tau_n(\omega) = 0$ для всех $n \in \Omega$ и, следовательно, $\sigma_m(\omega) = 0$ для всех $m \in \mathbb{N}$. Предположим, что $0 < \tau(\omega) < \infty$. Для любого

$\varepsilon > 0$ найдется $n_0 = n_0(\omega) \in \mathbb{N}$ такое, что $\tau_{n_0}(\omega) > \tau(\omega) - \varepsilon/2$, так как $\lim_{n\to\infty} \tau_n(\omega) = \tau(\omega)$. Так как имеет место сходимость $\lim_{m\to\infty} \tau_{n_0,m}(\omega) = \tau_{n_0}(\omega)$, то найдется индекс $m_0 = m_0(\omega, n_0) \in \mathbb{N}$, $m_0 \geq n_0$, такой, что $\tau_{n_0,m_0}(\omega) > \tau_{n_0}(\omega) - \varepsilon/2$. Отсюда следует, что $\sigma_{m_0}(\omega) \geq \tau_{n_0,m_0}(\omega) > \tau_{n_0}(\omega) - \varepsilon/2 > \tau(\omega) - \varepsilon$ и, следовательно, $\tau(\omega) \geq \lim_{m\to\infty} \sigma_m(\omega) > \tau(\omega) - \varepsilon$. Число ε можно выбрать произвольно малым. Поэтому $\lim_{m\to\infty} \sigma_m(\omega) = \tau(\omega)$. Предположим, что $\tau(\omega) = \infty$. Так как $\lim_{n\to\infty} \tau_n(\omega) = \tau(\omega)$, то для любого $c > 0$ найдется $n_0 = n_0(\omega) \in \mathbb{N}$ такое, что $\tau_{n_0}(\omega) > c$. Так как $\lim_{m\to\infty} \tau_{n_0,m}(\omega) = \tau_{n_0}(\omega)$, то найдется $m_0 = m_0(\omega, n_0) \in \mathbb{N}$, $m_0 \geq n_0$, такое, что $\tau_{n_0,m_0}(\omega) > c$. Отсюда следует, что $\sigma_{m_0}(\omega) > c$ и $\lim_{m\to\infty} \sigma_m(\omega) > c$. Число c можно взять произвольно большим. Поэтому $\lim_{m\to\infty} \sigma_m(\omega) = \infty = \tau(\omega)$.

Докажем, что на множестве $\{0 < \tau\}$ выполняется неравенство $\sigma_m < \tau$ для любого $m \in \mathbb{N}$. Фиксируем $m \in \mathbb{N}$ и $\omega \in \{0 < \tau\}$. Так как $\lim_{n\to\infty} \tau_n(\omega) = \tau(\omega)$, то найдется $n_0 \in \mathbb{N}, n_0 \geq m$, такое, что $0 < \tau_{n_0}(\omega)$. Напомним, что $\sigma_{n_0}(\omega) = \max\{\tau_{1,n_0}(\omega), \ldots, \tau_{n_0,n_0}(\omega)\}$ и $\tau_{1,n_0}(\omega) \leq \tau_1(\omega), \ldots, \tau_{n_0,n_0}(\omega) \leq \tau_{n_0}(\omega)$. Если $0 < \tau_k(\omega)$ для некоторого $k = 1, \ldots, n_0$, то должно выполняться строгое неравенство $\tau_{k,n_0}(\tau) < \tau_k(\omega) \leq \tau(\omega)$ по определению предвещающей последовательности $\{\tau_{k,m}\}_{m\geq 1}$ для τ_k. Тем самым доказано, что $\sigma_m(\omega) \leq \sigma_{n_0}(\omega) = \max\{\tau_{1,n_0}(\omega), \ldots, \tau_{n_0,n_0}(\omega)\} < \tau(\omega)$ и последовательность $\{\sigma_m\}_{m\geq 1}$ предвещает τ.

(ii). Обозначим $\sigma_m = \min\{\tau_{1,m}, \ldots, \tau_{m,m}\}$. В силу теорем 3.6.7 и 3.6.13 функции σ_m и τ являются $\mathbb{F}$-марковскими моментами. Докажем, что последовательность $\{\sigma_m\}_{m\geq 1}$ предвещает τ.

Из неравенств $\sigma_m \leq \min\{\tau_{1,m+1}, \ldots, \tau_{m,m+1}\} \leq \sigma_{m+1}$ следует, что последовательность $\{\sigma_m\}_{m\geq 1}$ возрастает. Докажем, что последовательность $\{\sigma_m\}_{m\geq 1}$ сходится к τ. Для любого $m \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства $\sigma_m = \min\{\tau_{1,m}, \ldots, \tau_{m,m}\} \leq \tau_{m,m} \leq \tau_m$. Отсюда следует, что $\lim_{m\to\infty} \sigma_m \leq \lim_{m\to\infty} \tau_m = \tau$. Достаточно доказать, что $\lim_{m\to\infty} \sigma_m \geq \tau$. Возьмем произвольное элементарное событие $\omega \in \Omega$. Если $\tau(\omega) = \infty$, то $\tau_n(\omega) = \infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ мы имеем, что $\lim_{m\to\infty} \tau_{n,m}(\omega) = \tau_n(\omega) = \infty$. Поэтому для любого числа $c > 0$ найдется $m_n = m_n(\omega) \in \mathbb{N}, m_n \geq n$, такое, что $\tau_{n,m_n}(\omega) > c$. Обозначим $k_n = \max\{m_1, \ldots, m_n\}$. Заметим, что

$$c < \tau_{1,m_1}(\omega) \leq \tau_{1,k_n}(\omega), \ldots, c < \tau_{n,m_n}(\omega) \leq \tau_{n,k_n}(\omega)$$

и $\sigma_{k_n}(\omega) = \min\{\tau_{1,k_n}(\omega), \ldots, \tau_{k_n,k_n}(\omega)\} > c$. Так как последовательность $\{\sigma_m\}_{m\geq 1}$ возрастает, то $c < \sigma_{k_n}(\omega) \leq \lim_{m\to\infty}\sigma_m(\omega)$, и, следовательно, $\lim_{m\to\infty}\sigma_m(\omega) = \infty = \tau(\omega)$, так как число c можно взять произвольно большим.

Предположим теперь, что $\tau(\omega) < \infty$. По условию найдется $n_0 = n_0(\omega) \in \mathbb{N}$ такое, что $\tau_n(\omega) = \tau_{n_0}(\omega)$ для всех $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$. Так как $\lim_{m\to\infty}\tau_{n,m}(\omega) = \tau_n(\omega) = \tau(\omega)$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $m_n = m_n(\omega,\varepsilon) \in \mathbb{N}, m_n \geq n$, такое, что $\tau_{n,m_n}(\omega) > \tau(\omega) - \varepsilon$. Обозначим $k_n = \max\{m_1,\ldots,m_n\}$. Заметим, что

$$\tau(\omega) - \varepsilon < \tau_{1,m_1}(\omega) \leq \tau_{1,k_n}(\omega),\ldots,\tau(\omega) - \varepsilon < \tau_{n,m_n}(\omega) \leq \tau_{n,k_n}(\omega)$$

и $\sigma_{k_n}(\omega) = \min\{\tau_{1,k_n}(\omega),\ldots,\tau_{k_n,k_n}(\omega)\} > \tau(\omega) - \varepsilon$. Отсюда следует, что $\tau(\omega) - \varepsilon < \sigma_{k_n}(\omega) \leq \lim_{m\to\infty}\sigma_m(\omega)$ и $\lim_{m\to\infty}\sigma_m(\omega) \geq \tau(\omega)$, так как число $\varepsilon > 0$ можно взять произвольно малым.

Докажем, что на множестве $\{0 < \tau\}$ выполняется неравенство $\sigma_m < \tau$ для всех $m \in \mathbb{N}$. Пусть $\omega \in \{0 < \tau\}$ и $m \in \mathbb{N}$. По предположению существует $n_0 = n_0(\omega) \in \mathbb{N}, n_0 \geq m$, такое, что $\tau_n(\omega) = \tau_{n_0}(\omega)$ для всех $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, и, следовательно, $\tau_n(\omega) = \tau(\omega)$ для всех $n \geq n_0$. Так как $\lim_{m\to\infty}\tau_{n_0,m}(\omega) = \tau_{n_0}(\omega) = \tau(\omega)$, то найдется $m_0 = m_0(\omega,n_0) \geq n_0$ такое, что $0 < \tau_{n_0,m_0}(\omega)$. Из определения функции $\sigma_{m_0}(\omega)$ и неравенства $\tau_{n_0,m} < \tau_{n_0}$ для всех $m \in \mathbb{N}$ следует, что $\sigma_m(\omega) \leq \sigma_{m_0}(\omega) \leq \tau_{n_0,m_0}(\omega) < \tau_{n_0}(\omega) = \tau(\omega)$. ◀

3.7.7. Теорема. *Пусть дан предсказуемый $\mathbb{F}$-марковский момент τ. Тогда для любого $A \in \mathcal{F}_{\tau-}$ функция $\tau_A = \tau\mathbb{1}_A + \infty\mathbb{1}_{A^c}$ является предсказуемым $\mathbb{F}$-марковским моментом.*

▶ Обозначим $\mathcal{L}$ класс множеств $A \in \mathcal{F}_{\tau-}$ для которых функции τ_A и τ_{A^c} являются предсказуемыми $\mathbb{F}$-марковскими моментами. Возьмем какую-нибудь предвещающую последовательность $\{\tau_k\}_{k\geq 1}$ для τ. По теореме 3.7.4 сигма-алгебра $\mathcal{F}_{\tau-}$ порождается алгеброй $\mathcal{A} = \cup_{k=1}^{\infty}\mathcal{F}_{\tau_k}$. Докажем, что $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}$. Пусть $A \in \mathcal{A}$. Найдется $m \in \mathbb{N}$ такое, что $A \in \mathcal{F}_{\tau_k}$ для всех $k \geq m$. По теоремам 3.6.7, 3.6.9 и 3.6.11 функция $\sigma_n = (\tau_{m+n}\mathbb{1}_A + \infty\mathbb{1}_{A^c}) \wedge n$ является $\mathbb{F}$-марковским моментом. Заметим, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $\sigma_n < \tau_A$ на множестве $\{\tau_A > 0\}$. Возрастающая последовательность $\{\sigma_n\}_{n\geq 1}$ сходится к τ_A. В этих рассуждениях множество A и его дополнение A^c можно поменять ролями и доказать, что функция τ_{A^c} является предсказуемым $\mathbb{F}$-марковским моментом.

Докажем, что $\mathcal{L}$ является λ-классом. Заметим, что $\Omega \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}$. Докажем, что $A \setminus B \in \mathcal{L}$, если $A, B \in \mathcal{L}$ и $B \subset A$. Заметим, что

$\tau_{A\setminus B} = \tau\mathbb{1}_A\mathbb{1}_{B^c} + \infty\mathbb{1}_{A^c\cup B}$. Возьмем какие-нибудь предвещающие последовательности $\{\tau_n\}_{n\geq 1}$ и $\{\sigma_n\}_{n\geq 1}$ для τ_A и τ_{B^c}. По теореме 3.6.7 функции $\tau_n \vee \sigma_n$, $n \in \mathbb{N}$, являются $\mathbb{F}$-марковскими моментами. Последовательность $\{\tau_n \vee \sigma_n\}_{n\geq 1}$ предвещает $\tau_A \vee \tau_{B^c} = \tau_{A\setminus B}$. Докажем, что $A \in \mathcal{L}$, если $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_n \uparrow$ и $A_n \in \mathcal{L}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Возрастающая последовательность $\{\tau_{A_n}\}_{n\geq 1}$ предсказуемых $\mathbb{F}$-марковских моментов сходится к τ_A. По теореме 3.7.5 функция τ_A является предсказуемым $\mathcal{F}$-марковским моментом. Выше было доказано, что $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}$. По теореме 1.2.7 справедливо включение $\mathcal{F}_{\tau-} = \sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{L}$ и, следовательно, $\mathcal{L} = \mathcal{F}_{\tau-}$. ◀

Некоторые требования в определении 3.7.1 разумно ослабить, потребовав, чтобы они выполнялись почти всюду.

3.7.8. Определение. Функция $\tau\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ называется $\mathbb{P}$-*предсказуемым* $\mathbb{F}$-марковским моментом или $\mathbb{P}$-*предсказуемым* марковским моментом относительно фильтрации $\mathbb{F}$, если существует возрастающая п.в. последовательность $\{\tau_n\}_{n\geq 1}$ марковских моментов относительно $\mathbb{F}$, которая сходится п.в. к τ, и для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $\tau_n < \tau$ п.в. на множестве $\{0 < \tau\}$. Последовательность $\{\tau_n\}_{n\geq 1}$ называется $\mathbb{P}$-*предвещающей* для τ.

3.7.9. Теорема. *Предположим, что вероятностное пространство является полным и фильтрация непрерывна справа и расширена. Тогда любой $\mathbb{P}$-предсказуемый $\mathbb{F}$-марковский момент является предсказуемым $\mathbb{F}$-марковским моментом.*

▶ Пусть даны $\mathbb{P}$-предсказуемый $\mathbb{F}$-марковский момент τ и некоторая $\mathbb{P}$-предвещающая последовательность $\{\tau_n\}_{n\geq 1}$ для τ. По теореме 3.6.14 функция $\sigma = \sup_{n\geq 1}\tau_n$ является $\mathbb{F}$-марковским моментом. По теореме 3.6.5, в силу равенства $\tau = \sigma$ п.в., функция τ является $\mathbb{F}$-марковским моментом. Имеется событие $A \in \mathcal{F}$ единичной вероятности, на котором последовательность $\{\tau_n\}_{n\geq 1}$ возрастает и сходится к τ, и выполняется неравенство $\tau_n < \tau$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Так как фильтрация $\mathbb{F}$ расширена, то $A \in \mathcal{F}_0$. Нетрудно проверить, что функция $\sigma_n = \tau_n\mathbb{1}_A + (0 \vee (\tau - 1/n))\mathbb{1}_{A^c}$ является $\mathbb{F}$-марковским моментом, и последовательность $\{\sigma_n\}_{n\geq 1}$ предвещает τ. ◀

3.8. Проекции и сечения множеств

Понятия проекции и сечения множеств, изучаемые ниже, выступают в качестве мощного средства исследования большого числа свойств случайных процессов. Предполагается, что даны полное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и расширенная, непрерывная справа фильтрация $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t \colon \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}, t \geq 0\}$. Перечисленные условия на вероятностное пространство и фильтрацию называются *обычными условиями.* Напомним, что $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ обозначает σ-алгебру борелевских подмножеств положительной полупрямой $\mathbb{R}_+$. Аналогично $\mathcal{B}_t = [0, t] \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ обозначает σ-алгебру борелевских подмножеств сегмента $[0, t], t > 0$. Символы $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$ и $\mathcal{B}_t \otimes \mathcal{F}_t$ обозначают прямые произведения указанных σ-алгебр.

3.8.1. Определение. Обозначим $\pi \colon \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \Omega$ отображение, переводящее точку (t, ω) в точку $\pi(t, \omega) = \omega$. Образ $\pi(A)$ множества $A \subseteq \mathbb{R}_+ \times \Omega$ называется *проекцией* A на множество Ω.

Из этого определения следует, что $\pi(A)$ состоит из точек $\omega \in \Omega$, для которых существует по крайней мере одно $t \in \mathbb{R}_+$ такое, что $(t, \omega) \in A$. Нетрудно проверить, что

$$\pi(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \cup_{n=1}^{\infty} \pi(A_n), \pi(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) \subseteq \cap_{n=1}^{\infty} \pi(A_n) \qquad (3.8.1)$$

для любых множеств $A_n \subseteq \mathbb{R}_+ \times \Omega, n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$.

Обозначим $\mathcal{K}$ класс всех конечных объединений множеств вида $[\alpha, \beta] \times F$ с $0 \leq \alpha < \beta < \infty$ и $F \in \mathcal{F}$, а также класс $\mathcal{K}_\delta$ всех счетных пересечений множеств из класса $\mathcal{K}$. Заметим, что $\cap_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{K}_\delta$ для любых $B_n \in \mathcal{K}_\delta, n \in \mathbb{N}$. Класс $\mathcal{K}_\delta$ содержит объединение любого конечного числа множеств из $\mathcal{K}_\delta$. Это утверждение достаточно доказать для двух множеств. Пусть $B = \cap_{n=1}^{\infty} B_n$ и $B' = \cap_{n=1}^{\infty} B'_n$ принадлежат классу $\mathcal{K}_\delta$ с $B_n, B'_n \in \mathcal{K}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Обозначим $D_n = \cap_{k=1}^{n} B_k$ и $D'_n = \cap_{k=1}^{n} B'_k$. Заметим, что $D_{n+1} \subseteq D_n, D'_{n+1} \subseteq D'_n$ для всех $n \in \mathbb{N}, B = \cap_{n=1}^{\infty} D_n, B' = \cap_{n=1}^{\infty} D'_n$. Нетрудно убедиться, что $B \cup B' = \cap_{k=1}^{\infty} \cap_{n=1}^{\infty} (D_n \cup D'_k)$ и $D_n \cup D'_k \in \mathcal{K}$ для всех $n, k \in \mathbb{N}$, и, следовательно, $B \cup B' \in \mathcal{K}_\delta$. Обозначим $\mathcal{K}_t = ([0, t] \times \Omega) \cap \mathcal{K}$ и $\mathcal{K}_{\delta,t} = ([0, t] \times \Omega) \cap \mathcal{K}_\delta$ для любого $t > 0$. Класс $\mathcal{K}_t$ содержит все конечные объединения множеств из $\mathcal{K}_t$. Класс $\mathcal{K}_{\delta,t}$ содержит все счетные пересечения и конечные объединения множеств из $\mathcal{K}_{\delta,t}$.

3.8.2. Теорема. *Если $B = \cap_{n=1}^{\infty} B_n, B_n \in \mathcal{K}_{\delta,t}$ и $B_{n+1} \subseteq B_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $\pi(B) \in \mathcal{F}$ и выполняется равенство*

$$\pi(\cap_{n=1}^{\infty} B_n) = \cap_{n=1}^{\infty} \pi(B_n). \qquad (3.8.2)$$

► Докажем сначала равенство (3.8.2). В силу второго соотношения в (3.8.1) достаточно доказать, что $\cap_{n=1}^{\infty} \pi(B_n) \subseteq \pi(\cap_{n=1}^{\infty} B_n)$.

Если $\omega \in \cap_{n=1}^{\infty}\pi(B_n)$, то найдется $t_n \in [0,t]$ такое, что $(t_n,\omega) \in B_n$ и $t_n \in B_n^{(\omega)}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, где $B_n^{(\omega)}$ обозначает ω-сечение множества B_n. Для каждого $B_n \in \mathcal{K}_t$ существуют множества $B_{n,m} \in \mathcal{K}_t, m \in \mathbb{N}$, такие, что $B_n = \cap_{m=1}^{\infty}B_{n,m}$. По теореме 1.7.2 для ω-сечений справедливо равенство $B_n^{(\omega)} = \cap_{m=1}^{\infty}B_{n,m}^{(\omega)}$. Каждое ω-сечение $B_{n,m}^{(\omega)}$ является замкнутым множеством и, следовательно, $B_n^{(\omega)}$ также является замкнутым множеством. Ограниченная последовательность $\{t_n\}_{n\geq 1}$ имеет сходящуюся подпоследовательность. Можно предположить, что сама последовательность $\{t_n\}_{n\geq 1}$ сходится к некоторому числу $s \in [0,t]$. Для любого $r \in \mathbb{N}$ последовательность $\{t_n\}_{n\geq r}$ содержится в замкнутом множестве $B_r^{(\omega)}$ и, следовательно, $s \in B_r^{(\omega)}$. Отсюда следует, что $s \in \cap_{n=1}^{\infty}B_n^{(\omega)} = (\cap_{n=1}^{\infty}B_n)^{(\omega)} = B^{(\omega)}$ и, следовательно, $(s,\omega) \in B, \omega \in \pi(B)$ и $\cap_{n=1}^{\infty}\pi(B_n) \subseteq \pi(B) = \pi(\cap_{n=1}^{\infty}B_n)$.

Докажем, что $\pi(B) \in \mathcal{F}$. В силу (3.8.2) достаточно доказать, что $\pi(B) \in \mathcal{F}$ для любого $B \in \mathcal{K}_{\delta,t}$. Для любого $B \in \mathcal{K}_{\delta,t}$ существуют множества $B'_n \in \mathcal{K}_t, n \in \mathbb{N}$, такие, что $B = \cap_{n=1}^{\infty}B'_n$. Можно считать, что $B'_{n+1} \subseteq B'_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. В противном случае вместо B'_n можно взять $B''_n = \cap_{k=1}^{n}B'_k$. Заметим, что множества $B''_n, n \in \mathbb{N}$, принадлежат $\mathcal{K}_t, B''_{n+1} \subseteq B''_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $B = \cap_{n=1}^{\infty}B''_n$. Далее предполагается, что $B'_{n+1} \subseteq B'_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. В силу равенства (3.8.2) достаточно доказать, что $\pi(B'_n) \in \mathcal{F}_t$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Это справедливо для любого $B'_n = \cup_{k=1}^{m_n}([\alpha_{k,n},\beta_{k,n}] \times F_{k,n}) \in \mathcal{K}_t$, так как выполняется равенство $\pi(B'_n) = \cup_{k=1}^{m_n}F_{k,n} \in \mathcal{F}$. ◀

Обозначим $\mathcal{A}_t$ класс всех конечных объединений множеств вида $\{t\}\times G$ и $[\alpha,\beta)\times F$ с $0 \leq \alpha < \beta \leq t$ и $G, F \in \mathcal{F}$. Нетрудно проверить, что класс $\mathcal{A}_t$ является алгеброй, и $\mathcal{A}_t$ порождает σ-алгебру $\mathcal{B}_t \otimes \mathcal{F}$. Заметим, что $\{t\}\times G \in \mathcal{K}_{\delta,t}$ для любого $G \in \mathcal{F}$, $[\alpha,\gamma]\times F \subseteq [\alpha,\beta)\times F$ для любых $0 \leq \alpha < \gamma < \beta \leq t$ и $F \in \mathcal{F}$, а также выполняются равенства $\pi(\{t\}\times G) = G$ и $\pi([\alpha,\beta)\times F) = F = \pi([\alpha,\gamma]\times F)$. Подчеркнем, что любое $A \in \mathcal{A}_t$ содержит $B \in \mathcal{K}_{\delta,t}$ такое, что $\pi(A) = \pi(B) \in \mathcal{F}$. Следующее утверждение называется теоремой о проекции.

3.8.3. Теорема. *Если $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\otimes\mathcal{F}$, тогда $\pi(A) \in \mathcal{F}$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует множество $B \in \mathcal{K}_\delta$ такое, что $B \subseteq A$ и*

$$\mathbb{P}\{\pi(A)\} < \mathbb{P}\{\pi(B)\} + \varepsilon. \tag{3.8.3}$$

► Докажем теорему сначала для всех множеств $A \in \mathcal{B}_t \otimes \mathcal{F}$ и для любого $t > 0$. Обозначим $\mathcal{M}_t$ класс множеств $A \in \mathcal{B}_t \otimes \mathcal{F}$ таких, что $\pi(A) \in \mathcal{F}$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует множество $B = B_\varepsilon \in \mathcal{K}_{\delta,t}$

со свойствами $B \subseteq A$ и $\mathbb{P}\{\pi(A)\} < \mathbb{P}\{\pi(B)\} + \varepsilon$. По доказанному выше $\mathcal{A}_t \subseteq \mathcal{M}_t$. Ниже будет доказано, что $\mathcal{M}_t$ является монотонным классом. По теореме 1.2.7 будет выполняться равенство $\mathcal{M}_t = \mathcal{B}_t \otimes \mathcal{F}$.

Докажем, что $\mathcal{M}_t$ является монотонным классом. Пусть A является объединением $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ множеств $A_n \in \mathcal{M}_t$ таких, что $A_n \subseteq A_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Так как $\pi(A_n) \in \mathcal{F}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $\pi(A) = \cup_{n=1}^{\infty} \pi(A_n) \in \mathcal{F}$ в силу (3.8.1). Для любых $\varepsilon > 0$ и A_n найдется $B_n \in \mathcal{K}_{\delta,t}$ со свойствами $B_n \subseteq A_n$ и $\mathbb{P}\{\pi(A_n)\} < \mathbb{P}\{\pi(B_n)\} + 2^{-n-1}\varepsilon$. Обозначим $B = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$ и заметим, что $\pi(B) = \cup_{n=1}^{\infty} \pi(B_n) \in \mathcal{F}, B \subseteq A$ и $\pi(B) \subseteq \pi(A)$. Отсюда следует, что $\pi(A) \setminus \pi(B) \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} (\pi(A_n) \setminus \pi(B_n))$,

$$\mathbb{P}\{\pi(A)\} - \mathbb{P}\{\pi(B)\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{\pi(A_n) \setminus \pi(B_n)\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n-1}\varepsilon = \varepsilon/2.$$

Положим $B'_n = \cup_{k=1}^{n} B_k$ и заметим, что $B'_n \in \mathcal{K}_{\delta,t}, B'_n \subseteq B'_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}, B = \cup_{n=1}^{\infty} B'_n, \pi(B) = \cup_{n=1}^{\infty} \pi(B'_n)$. Отсюда следует, что $\mathbb{P}\{\pi(B)\} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{\pi(B'_n)\}$. Поэтому найдется $m \in \mathbb{N}$ такое, что $\mathbb{P}\{\pi(B)\} < \mathbb{P}\{\pi(B'_m)\} + \varepsilon/2$ и

$$\mathbb{P}\{\pi(A)\} \leq \mathbb{P}\{\pi(B)\} + \frac{\varepsilon}{2} < \mathbb{P}\{\pi(B'_m)\} + \varepsilon.$$

Это означает, что $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}_t$.

Предположим теперь, что $A = \cap_{n=1}^{\infty} A_n, A_n \in \mathcal{M}_t$ и $A_{n+1} \subseteq A_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Для доказательства, что $A \in \mathcal{M}_t$ требуется развить новый математический аппарат и много места. По этой причине доказательство не приводится. Его можно прочитать в книге [7].

Теорема доказана для всех множеств $A \in \mathcal{B}_t \otimes \mathcal{F}$ и для любого $t > 0$. Произвольное множество $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$ может быть представлено в виде объединения $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ счетного числа множеств $A_n = A \cap ([0, n] \times \Omega) \in \mathcal{B}_n \otimes \mathcal{F}, n \in \mathbb{N}$. По доказанному выше $\pi(A_n) \in \mathcal{F}$ для любого A_n и для любого $\varepsilon > 0$ существует множество $B_n \in \mathcal{K}_{\delta,n}$ такое, что $\mathbb{P}\{\pi(A_n)\} < \mathbb{P}\{\pi(B_n)\} + 2^{-n-1}\varepsilon$. Обозначим $B = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$ и заметим, что $B \subseteq A$ и $\cup_{n=1}^{\infty} \pi(B_n) = \pi(B) \subseteq \pi(A)$ и, следовательно, $\pi(A) \setminus \pi(B) \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} (\pi(A_n) \setminus \pi(B_n))$. Отсюда следует, что

$$\mathbb{P}\{\pi(A)\} - \mathbb{P}\{\pi(B)\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{\pi(A_n) \setminus \pi(B_n)\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n-1}\varepsilon = \varepsilon/2.$$

Обозначим $B'_n = \cup_{k=1}^{n} B_k$. Заметим, что $B'_n \in \mathcal{K}_{\delta,n} \subset \mathcal{K}_{\delta}, B'_n \subseteq B'_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $B = \cup_{n=1}^{\infty} B'_n$. Так как $\pi(B) = \cup_{n=1}^{\infty} \pi(B'_n)$, то

$\mathbb{P}\{\pi(B)\} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{\pi(B'_n)\}$ и $\mathbb{P}\{\pi(B)\} < \mathbb{P}\{\pi(B'_m)\} + \varepsilon/2$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Отсюда следует, что

$$\mathbb{P}\{\pi(A)\} < \mathbb{P}\{\pi(B)\} + \frac{\varepsilon}{2} < \mathbb{P}\{\pi(B'_m)\} + \varepsilon. \quad \blacktriangleleft$$

3.8.4. Определение. Множество $A \subseteq \mathbb{R}_+ \times \Omega$ называется *прогрессивно измеримым* или, более подробно, $\mathbb{F}$-*прогрессивно измеримым,* если $A \cap ([0, t] \times \Omega) \in \mathcal{B}_t \otimes \mathcal{F}_t$ для любого $t \in \mathbb{R}_+$.

Проверим, что класс $\mathcal{P}_{pg}$ всех прогрессивно измеримых множеств является сигма-алгеброй. Действительно, $\mathbb{R}_+ \times \Omega \in \mathcal{P}_{pg}$, так как $(R_+ \times \Omega) \cap ([0, t] \times \Omega) = [0, t] \times \Omega \in \mathcal{B}_t \otimes \mathcal{F}_t$ для любого $t \in \mathbb{R}_+$. Если $A \in \mathcal{P}_{pg}$, то $A^c \cap ([0, t] \times \Omega) = ([0, t] \times \Omega) \setminus (A \cap ([0, t] \times \Omega)) \in \mathcal{B}_t \otimes \mathcal{F}_t$ для любого $t \geq 0$, и, следовательно, $A^c \in \mathcal{P}_{pg}$. Если $A_n \in \mathcal{P}_{pg}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то объединение $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ принадлежит $\mathcal{P}_{pg}$, так как $A \cap ([0, t] \times \Omega) = \cup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap ([0, t] \times \Omega)) \in \mathcal{B}_t \otimes \mathcal{F}_t$ для любого $t \in \mathbb{R}_+$.

3.8.5. Определение. Пусть дано любое множество $A \subseteq \mathbb{R}_+ \times \Omega$. Функция $D_A \colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$,

$$D_A(\omega) = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \colon (t, \omega) \in A\}, \tag{3.8.4}$$

где $D_A(\omega) = \infty$, если $\{t \in \mathbb{R}_+ \colon (t, \omega) \in A\} = \varnothing$, называется *дебютом множества* A.

Следующее утверждение, являющееся следствием предыдущей теоремы, называется теоремой о дебюте.

3.8.6. Теорема. (i) *Дебют* D_A *любого* $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$-*измеримого множества* $A \subseteq \mathbb{R}_+ \times \Omega$ *является* $\mathcal{F}$-*измеримой функцией.*
(ii) *Если множество* A *прогрессивно измеримо, то его дебют* D_A *является* $\mathbb{F}$-*марковским моментом.*

$\blacktriangleright$ (i). Для любого $t > 0$ множество $\{D_A < t\}$ является проекцией множества $B_t = A \cap ([0, t) \times \Omega) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$. По теорема 3.8.3 множество $\{D_A < t\}$ принадлежит σ-алгебре $\mathcal{F}$. По теореме 1.5.4 функция $D_A : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ измерима относительно сигма-алгебры $\mathcal{F}$.

(ii). Снова, множество $\{D_A < t\}$ является проекцией множества B_t. На этот раз $B_t \in \mathcal{B}_t \otimes \mathcal{F}_t$, так как $A \in \mathcal{P}_{pg}$. По теореме 3.8.3 множество $\{D_A < t\}$ принадлежит сигма-алгебре $\mathcal{F}_t$. По предположению фильтрация $\mathbb{F}$ непрерывна справа. По теореме 3.6.4 дебют D_A является $\mathbb{F}$-марковским моментом. $\blacktriangleleft$

3.8.7. Определение. Множества вида $\{0\} \times G$ с $G \in \mathcal{F}_0$ и $(\alpha, \beta] \times F$ с $0 \leq \alpha < \beta < \infty, F \in \mathcal{F}_\alpha$, называются *предсказуемыми прямоугольниками.* Сигма-алгебра $\mathcal{P}$, порожденная классом $\mathcal{R}$ всех предсказуемых прямоугольников, называется *предсказуемой* сигма-алгеброй. Множество A называется *предсказуемым,* если $A \in \mathcal{P}$.

3.8.8. Теорема. *Сигма-алгебра $\mathcal{P}$ порождается классом $\mathcal{R}'$ множеств вида $\{0\} \times G$ с $G \in \mathcal{F}_0$ и $[\alpha, \beta) \times F$ с $0 \le \alpha < \beta < \infty$ и $F \in \mathcal{F}_{\alpha-} = \cup_{t<\alpha}\mathcal{F}_t$, где $\mathcal{F}_{0-} = \mathcal{F}_0$.*

► Обозначим $\mathcal{P}'$ сигма-алгебру, порожденную классом $\mathcal{R}'$. Докажем, что $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}$. Для этого достаточно доказать, что $\mathcal{R}' \subseteq \mathcal{P}$. Если $0 \le \alpha < \beta < \infty$ и $F \in \mathcal{F}_\alpha$, то $(\alpha, \beta - 1/n] \times F \in \mathcal{R}$ для любого $n \in \mathbb{N}, \beta - 1/n > \alpha$, и $(\alpha, \beta) \times F = \cup_{\beta-1/n>\alpha}(\alpha, \beta - 1/n] \times F \in \mathcal{P}$. Пусть $[\alpha, \beta) \times F \in \mathcal{R}'$. Если $\alpha > 0$, то $F \in \mathcal{F}_s$ для некоторого $0 \le s < \alpha$, так как $F \in \cup_{t<\alpha}\mathcal{F}_t$. По доказанному выше $(\alpha - 1/n, \beta) \times F \in \mathcal{P}$ для всех $s < \alpha - 1/n < \beta$. Поэтому $[\alpha, \beta) \times F = \cap_{s<\alpha-1/n<\beta}(\alpha - 1/n, \beta) \times F \in \mathcal{P}$. Если $\alpha = 0$ и $F \in \mathcal{F}_0$, то $[0, \beta) \times F = (\{0\} \times F) \cup ((\alpha, \beta) \times F) \in \mathcal{P}$.

Чтобы завершить доказательство теоремы, достаточно убедиться, что $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}'$. Для этого достаточно доказать, что $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}'$. Если $0 \le \alpha < \beta < \infty$ и $F \in \mathcal{F}_\alpha$, то $[\alpha + 1/n, \beta) \times F \in \mathcal{R}' \subset \mathcal{P}'$ для любого $n \in \mathbb{N}$ таких, что $\alpha + 1/n < \beta$. Отсюда следует, что $(\alpha, \beta) \times F = \cup_{\alpha+1/n<\beta}[\alpha + 1/n, \beta) \times F \in P'$. Если $(\alpha, \beta] \times F \in \mathcal{R}$, то $(\alpha, \beta] \times F = \cap_{n=1}^{\infty}(\alpha, \beta + 1/n) \times F \in \mathcal{P}'$. ◄

3.8.9. Теорема. *Справедливо включение $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}_{pg}$.*

► Достаточно доказать, что все предсказуемые прямоугольники принадлежат σ-алгебре $\mathcal{P}_{pg}$. Предсказуемый прямоугольник $(\alpha, \beta] \times F$ принадлежит $\mathcal{P}_{pg}$, так как для любого $t \ge 0$ пересечение $A = ((\alpha, \beta] \times F) \cap ([0, t] \times \Omega)$ принадлежит $\mathcal{B}_t \otimes \mathcal{F}_t$. Действительно, $A = \varnothing$, если $t \le a$, и $A = (a, t \wedge \beta] \times F \in \mathcal{B}_t \otimes \mathcal{F}_t$, если $t > a$. Предсказуемый прямоугольник $\{0\} \times G$ также принадлежит $\mathcal{P}_{pg}$. ◄

3.8.10. Теорема. *Если $B = \cap_{n=1}^{\infty} B_n, B_n \in \mathcal{K}_\delta$ и $B_{n+1} \subseteq B_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $D_{B_n} \uparrow D_B$.*

► Можно считать, что все множества $B_n, n \in \mathbb{N}$, принадлежат $\mathcal{K}_{\delta,t}$ для некоторого $t > 0$. Из условия $B_n \downarrow$ следует, что $D_{B_{n+1}} \le D_{B_n} \le D_B$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Если $\lim_{n\to\infty} D_{B_n}(\omega) = \infty$ для некоторого $\omega \in \Omega$, то $\lim_{n\to\infty} D_{B_n}(\omega) = D_B(\omega)$. Предположим, что $\lim_{n\to\infty} D_{B_n}(\omega) < \infty$. Обозначим $s_n = D_{B_n}(\omega)$ и напомним, что $s_n = \inf B_n^{(\omega)}$ по определению 3.8.5. Так как множество $B_n^{(\omega)}$ замкнуто, то $s_n \in B_n^{(\omega)}$. Можно считать, что ограниченная последовательность $\{s_n\}_{n\ge1}$ сходится к некоторому числу $s \in [0, t]$. В противном случае можно взять сходящуюся подпоследовательность. Так как $\{s_n\}_{n\ge m} \subseteq B_m^{(\omega)}$ для любого $m \in \mathbb{N}$, то $s \in \cap_{n=1}^{\infty} B_n^{(\omega)} = B^{(\omega)}$. Отсюда следует, что $s' = D_B(\omega) \le s < \infty$. Предположим, что $s' < s$. Так как $s' = \inf B^{(\omega)}, B^{(\omega)} = \cap_{n=1}^{\infty} B_n^{(\omega)}$ и множество $B^{(\omega)}$ замкнуто, то $s' \in B^{(\omega)}$ и $(s', \omega) \in B = \cap_{n=1}^{\infty} B_n$. Отсюда следует, что $s' \in B_n^{(\omega)}$ и $s_n = D_{B_n}(\omega) \le s'$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Это ведет к противоречию $0 \le s' < s = \lim_{n\to\infty} s_n \le s'$. Поэтому должно выполняться равенство $\lim_{n\to\infty} D_{B_n}(\omega) = D_B(\omega)$. ◄

3.8.11. Определение. Пусть дана функция $\tau \colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$. Множество $[[\tau]] = \{(t, \omega) \in \mathbb{R}_+ \otimes \Omega \colon t = \tau(\omega)\}$ называется *графиком* функции τ. Неотрицательная $\mathcal{F}$-измеримая функция τ называется *сечением* множества $A \subseteq \mathbb{R}_+ \times \Omega$, если $[[\tau]] \subseteq A$.

Фиксируем число $t > 0$ и обозначим $\mathcal{A}_t^p$ класс конечных объединений множеств вида $\{t\} \times G$ с $G \in \mathcal{F}_{t-} = \cup_{s<t} \mathcal{F}_s$ и $[\alpha, \beta) \times F$, где $0 \le \alpha < \beta \le t$ и $F \in \mathcal{F}_{\alpha-}$. Если $\alpha = 0$, то $\mathcal{F}_{0-} = \mathcal{F}_0$ по определению. Нетрудно проверить, что $\mathcal{A}_t^p$ является алгеброй и порождает σ-алгебру $\mathcal{P}_t = ([0,t] \times \Omega) \cap \mathcal{P}$. Обозначим $\mathcal{K}_t^p$ класс конечных объединений множеств вида $\{t\} \times G$ с $G \in \mathcal{F}_{t-}$ и $[\alpha, \beta] \times F$ с $0 \le \alpha < \beta \le t$ и $F \in \mathcal{F}_{\alpha-}$ и $\mathcal{K}_{\delta,t}^p$ класс всех счетных пересечений множеств из $\mathcal{K}_t^p$.

3.8.12. Теорема. *Дебют D_B любого множества $B \in \mathcal{K}_\delta$ обладает следующими свойствами*

$$[[D_B]] \subseteq B \text{ и } \pi(B) = \{D_B < \infty\}. \tag{3.8.5}$$

► Возьмем множество $B = \cup_{j=1}^m K_j \in \mathcal{K}$ с $K_j = [\alpha_j, \beta_j] \times F_j$, $0 \le \alpha_j < \beta_j, F_j \in \mathcal{F}$. Нетрудно видеть, что $D_{K_j} = \alpha_j \mathbb{1}_{F_j} + \infty \mathbb{1}_{F_j^c}$,

$$[[D_{K_j}]] = \{\alpha\} \times F_j, \pi(K_j) = F_j, D_B = \min\{D_{K_1}, \dots, D_{K_m}\},$$
$$[[D_B]] \subseteq \cup_{j=1}^m [[D_{K_j}]] \subseteq \cup_j^m K_j = B, \pi(B) = \cup_{j=1}^m F_j = \{D_B < \infty\}.$$

Множество $B \in \mathcal{K}_\delta$ является пересечением $B = \cap_{n=1}^{\infty} B_n$ множеств $B_n \in \mathcal{K}, n \in \mathbb{N}$. Можно предположить, что $B_n \in \mathcal{K}_t$ для некоторого $t > 0$ и $B_{n+1} \subseteq B_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. В противном случае можно взять $B'_n = \cap_{k=1}^n B_k$ вместо B_n. Далее предполагается, что $B_n \downarrow$. Отсюда следует, что $D_{B_{n+1}} \le D_{B_n} \le D_B$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Докажем равенство в (3.8.5). По доказанному выше выполняется равенство $\pi(B_n) = \{D_{B_n} < \infty\}$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и, следовательно,

$$\{D_B < \infty\} \subseteq \cap_{n=1}^{\infty} \{D_{B_n} < \infty\} = \cap_{n=1}^{\infty} \pi(B_n) = \pi(B).$$

Последнее равенство выполняется по теореме 3.8.2. Равенство в (3.8.5) выполняется, если $\cap_{n=1}^{\infty} \{D_{B_n} < \infty\} \subseteq \{D_B < \infty\}$. Пусть

$\omega \in \cap_{n=1}^{\infty}\{D_{B_n} < \infty\}$. Обозначим $s_n = D_{B_n}(\omega)$. Заметим, что $s_n < \infty$ и $s_n = \inf B_n^{(\omega)} \in B_n^{(\omega)}$, $(s_n, \omega) \in B_n$. Так как $B_n \subseteq B_m$ для всех $n \geq m$ и множества $B_n^{(\omega)}$ замкнуты, то $s = \lim_{n\to\infty} s_n \in B_m^{(\omega)}$ и, следовательно, $s \in \cap_{n=1}^{\infty} B_n^{(\omega)} = B^{(\omega)}$ и $D_B(\omega) \leq s$. Тем самым доказано требуемое включение $\cap_{n=1}^{\infty}\{D_n < \infty\} \subseteq \{D_B < \infty\}$.

Докажем первое утверждение в (3.8.5). По доказанному выше справедливо включение $[[D_{B_n}]] \subseteq B_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и, следовательно, $\cap_{n=1}^{\infty}[[D_{B_n}]] \subseteq \cap_{n=1}^{\infty} B_n = B$. Поэтому достаточно доказать, что $[[D_B]] \subseteq \cap_{n=1}^{\infty}[[D_{B_n}]]$. Возьмем произвольную точку $(s, \omega) \in [[D_B]]$ и заметим, что $s = D_B(\omega) < \infty$ и $s = \inf B^{(\omega)}$. Так как множество $B^{(\omega)}$ замкнуто, то $s \in B^{(\omega)}$ и $(s, \omega) \in B = \cap_{n=1}^{\infty} B_n = \cap_{n=1}^{\infty}[[D_{B_n}]]$. Тем самым доказано, что $[[D_B]] \subseteq B$. ◄

3.8.13. Теорема. *Для любых $A \in \mathcal{P}$ и $\varepsilon > 0$ существует предсказуемый марковский момент τ такой, что $[[\tau]] \subseteq A$ и*

$$\mathbb{P}\{\pi(A)\} \leq \mathbb{P}\{\tau < \infty\} + \varepsilon. \tag{3.8.6}$$

► Докажем теорему для всех множеств $A \in \mathcal{A}_t^p$ и для любого $t > 0$. Если $A = \{\alpha\} \times F$ для некоторых $0 \leq \alpha < \infty$ и $F \in \mathcal{F}_{\alpha-}$, то функция $D_A = \alpha \mathbb{1}_F + \infty \mathbb{1}_{F^c}$ является предсказуемым марковским моментом в силу примера 3.7.2 (см. также теорему 3.7.7). Если $A = \cup_{j=1}^m A_j, A_j = [\alpha_j, \beta_j) \times F_j$, для некоторых $0 \leq \alpha_j < \beta_j < \infty$ и $F_j \in \mathcal{F}_{\alpha_j -}$, то $B = \cup_{j=1}^m [\alpha_j, \beta_j - \gamma] \times F_j \subseteq A$ и $B \in \mathcal{K}_{\delta,t}^p$ для любого $\gamma < \min\{\beta_j - \alpha_j, j = 1, \ldots, m\}$. Обозначим $B_j = [\alpha_j, \beta_j - \gamma] \times F_j$ и заметим (см. теорему 3.6.11), что функция $D_{B_j} = \alpha_j \mathbb{1}_{F_j} + \infty \mathbb{1}_{F_j^c}$ является предсказуемым марковским моментом и выполняется равенство $D_A = D_B = \min\{D_{B_1}, \ldots, D_{B_m}\}$. По теореме 3.7.5 функция D_B является предсказуемым марковским моментом. Нетрудно видеть, что справедливы следующие соотношения $\{D_B < \infty\} = \cup_{j=1}^m F_j = \pi(A)$ и

$$[[D_B]] \subseteq \cup_{j=1}^m [[D_{B_j}]] = \cup_{j=1}^m (\{\alpha\} \times F_j) \subseteq \cup_{j=1}^m B_j \subseteq \cup_{j=1}^m A_j = A.$$

Неравенство (3.8.6) выполняется с $\tau = D_B$. Тем самым теорема доказана для всех множеств $A \in \mathcal{A}_t^p$.

Докажем, что дебют любого множества $B \in \mathcal{K}_{\delta,t}^p$ является предсказуемым марковским моментом. Множество B является пересечением $B = \cap_{n=1}^{\infty} B_n$ множеств $B_n \in \mathcal{K}_t^p, n \in \mathbb{N}$. Можно предположить, что $B_{n+1} \subseteq B_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Поэтому $D_{B_n} \leq D_{B_{n+1}}$ для всех $n \in \mathbb{N}$

и $D_B = \lim_{n\to\infty} D_{B_n}$ по теореме 3.8.10. По теореме 3.7.5 дебют D_B является предсказуемым марковским моментом, так как по доказанному выше все функции $D_{B_n}, n \in \mathbb{N}$, являются предсказуемыми марковскими моментами.

Обозначим $\mathcal{M}_t^p$ класс множеств $A \in \mathcal{P}_t$ таких, что для любого $\varepsilon > 0$ существует множество $B = B_\varepsilon \in \mathcal{K}_{\delta,t}^p$ со свойствами $B \subseteq A$, $\pi(A) \in \mathcal{F}$ и $\mathbb{P}\{\pi(A)\} < \mathbb{P}\{\pi(B)\} + \varepsilon$. Обратим внимание, что свойство $\pi(A) \in \mathcal{F}$ выполняется по теореме 3.8.3. По аналогии с доказательством похожего утверждения в теореме 3.8.3 можно доказать, что $\mathcal{M}_t^p$ является монотонным классом. По теореме 1.2.7 выполняется равенство $\mathcal{M}_t^p = \mathcal{P}_t$, так как $\mathcal{A}_t^p \subset \mathcal{M}_t^p$ по доказанному выше.

Докажем теорему в общем случае. Произвольное множество $A \in \mathcal{P}$ можно представить в виде объединения $A = \cup_{n=1}^\infty A_n$ предсказуемых множеств $A_n = A \cap ([0, n] \times \Omega), n \in \mathbb{N}$. Заметим, что $A_n \subseteq A_{n+1}$ и $\pi(A_n) \subseteq \pi(A_{n+1})$ для всех $n \in \mathbb{N}, \pi(A) = \cup_{n=1}^\infty \pi(A_n)$ и $\mathbb{P}\{\pi(A)\} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{\pi(A_n)\}$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется $m \in \mathbb{N}$ такое, что $\mathbb{P}\{\pi(A)\} < \mathbb{P}\{\pi(A_m) < \infty\} + \varepsilon/2$. Существует множество $B \subseteq A_m$ такое, что $B \in \mathcal{K}_{\delta,m}^p$ и $\mathbb{P}\{\pi(A_m)\} \le \mathbb{P}\{\pi(B)\} + \varepsilon/2$, и, следовательно, $\mathbb{P}\{\pi(A)\} < \mathbb{P}\{\pi(B)\} + \varepsilon$. По теореме 3.8.12 выполняются соотношения $[[D_B]] \subseteq B \subseteq A_m \subseteq A$ и $\mathbb{P}\{\pi(B)\} = \mathbb{P}\{D_B < \infty\}$. Отсюда следует, что $\mathbb{P}\{\pi(A)\} < \mathbb{P}\{D_B < \infty\} + \varepsilon$. По доказанному выше дебют D_B является предсказуемым марковским моментом. Неравенство (3.8.6) выполняется с $\tau = D_B$. ◄

3.8.14. Теорема. *$\mathbb{F}$-марковский момент является предсказуемым марковским моментом тогда и только тогда, когда его график является предсказуемым множеством.*

► Докажем сначала, что для любого $\mathbb{F}$-марковского момента τ множество $((\tau, \infty)) = \{(t, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \colon \tau(\omega) < t < \infty\}$ принадлежит предсказуемой сигма-алгебре $\mathcal{P}$. Рассмотрим случайный процесс $X = \{X_t, t \ge 0\}, X_t(\omega) = \mathbb{1}_{((\tau,\infty))}(t, \omega)$, для любых $(t, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$. Нетрудно видеть, что случайный процесс X непрерывен слева и согласован с фильтрацией $\mathbb{F}$. Определим случайный процесс $X^{(n)} = \{X_t^{(n)}, t \ge 0\}$ для любого $n \in \mathbb{N}$, положив

$$X_t^{(n)} = \sum_{k=1}^\infty X_{(k-1)2^{-n}} \mathbb{1}_{((k-1)2^{-n}, k2^{-n}]}(t), t \in \mathbb{R}_+.$$

В силу непрерывности слева случайного процесса X выполняется равенство $\lim_{n\to\infty} X_t^{(n)} = X_t$ для каждого $t \in \mathbb{R}_+$. Каждое слагаемое ряда принимает только два значения: ноль и единицу. Множество

$$\{(t,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega\colon X_{(k-1)2^{-n}}(\omega)\mathbb{1}_{((k-1)2^{-n},k2^{-n}]}(t) = 1\} = \\ = \{X_{(k-1)2^{-n}} = 1\} \times ((k-1)2^{-n}, k2^{-n}]$$

является предсказуемым прямоугольником, и, следовательно, множество $\{(t,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega\colon X_t^{(n)}(\omega) = 1\}$ принадлежит $\mathcal{P}$. Это означает, что функция $X^{(n)}$ двух переменных $(t,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$ измерима относительно сигма-алгебры $\mathcal{P}$. По теореме 1.5.7 функция X измерима относительно $\mathcal{P}$. Поэтому множество $((\tau,\infty))$, будучи прообразом $X^{-1}(\{1\})$ борелевского множества $\{1\}$, принадлежит $\mathcal{P}$.

Предположим, что τ является предсказуемым марковским моментом. Возьмем какую-либо предвещающую последовательность $\{\tau_n\}_{n\geq 1}$ для τ. Из равенств

$$[[\tau,\infty)) = \{(t,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega\colon \tau \leq t < \infty\} = \cap_{n=1}^{\infty}((\tau_n,\infty))$$

следует, что $[[\tau,\infty)) \in \mathcal{P}$ и $[[\tau]] = [[\tau,\infty)) \setminus ((\tau,\infty)) \in \mathcal{P}$.

Предположим теперь, что τ является $\mathbb{F}$-марковским моментом, график $[[\tau]]$ которого является предсказуемым множеством. Предположим дополнительно, что функция τ ограничена некоторым числом $t > 0$. Для такой функции τ выполняется равенство $\pi([[\tau]]) = \Omega$. По теореме 3.8.13 для любого $n \in \mathbb{N}$ существует предсказуемый марковский момент σ_n такой, что $[[\sigma_n]] \subseteq [[\tau]]$ и выполняется неравенство $1 = \mathbb{P}\{\pi([[\tau]])\} < \mathbb{P}\{\sigma_n < \infty\} + 2^{-n}$. По теореме 3.7.5 функция $\tau_n = \min\{\sigma_1,\ldots,\sigma_n\}$ является предсказуемым марковским моментом. Так как $\tau_n \leq \sigma_n$, то $\mathbb{P}\{\tau_n < \infty\} > 1 - 2^{-n}$ и $\mathbb{P}\{\Omega'\} = 1$, где $\Omega' = \cup_{m=1}^{\infty} \cap_{n=m}^{\infty} \{\tau_n < \infty\} \in \mathcal{F}$. Для любого $\omega \in \Omega'$ существует $m = m(\omega)$ такое, что $\tau_n(\omega) < \infty$ и $(\tau_n(\omega),\omega) \in [[\tau_n]] \subseteq [[\tau]]$ для всех $n \geq m$ и, следовательно, $\tau_n(\omega) = \tau(\omega)$ для всех $n \geq m$. По последовательности $\{\tau_n\}_{n\geq 1}$ можно построить (см. теорему 3.7.6) $\mathbb{P}$-предвещающую последовательность $\{\tau'_n\}_{n\geq 1}$ для τ. Поэтому τ является $\mathbb{P}$-предсказуемым марковским моментом. По теореме 3.7.9 функция τ является предсказуемым марковским моментом.

Рассмотрим теперь общий случай. По условию функция τ является $\mathbb{F}$-марковским моментом, график $[[\tau]]$ которого принадлежит $\mathcal{P}$. По доказанному выше множество $((\tau,\infty))$ принадлежит $\mathcal{P}$ и, следовательно, $[[\tau,\infty)) = [[\tau]] \cup ((\tau,\infty)) = \{(t,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega\colon \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{P}$. По теореме 3.8.8 для любого $n \in \mathbb{N}$ множество $[n, n+1) \times \Omega$ принадлежит $\mathcal{P}$ и, следовательно, $[n,\infty) \times \Omega = \cup_{k=n}^{\infty}([k,k+1) \times \Omega) \in \mathcal{P}$.

Отсюда следует, что множество

$$[[\tau, n)) = \{(t, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \colon \tau(\omega) \le t < n\} = [[\tau, \infty)) \setminus ([n, \infty) \times \Omega)$$

принадлежит $\mathcal{P}$ и $[[\tau \wedge n, \infty)) = ([n, \infty) \times \Omega) \cup [[\tau, n)) \in \mathcal{P}$. По теореме 3.6.7 функция $\tau \wedge n$ является $\mathbb{F}$-марковским моментом. Поэтому множества $((\tau \wedge n, \infty))$ и $[[\tau \wedge n]] = [[\tau \wedge n, \infty)) \setminus ((\tau \wedge n, \infty))$ принадлежат сигма-алгебре $\mathcal{P}$. По доказанному выше ограниченная функция $\tau \wedge n$ является предсказуемым марковским моментом. Последовательность $\{\tau \wedge n\}_{n \ge 1}$ возрастает и сходится к τ. По теореме 3.7.6 функция τ является предсказуемым марковским моментом. ◀

3.8.15. Следствие. *Если $A \in \mathcal{P}$ и $[[D_A]] \subseteq A$, то дебют D_A множества A является предсказуемым марковским моментом.*

▶ По теореме 3.8.6 дебют D_A является марковским моментом относительно фильтрации $\mathbb{F}$. По доказанному в теореме 3.8.14 множество $((D_A, \infty))$ является предсказуемым. Поэтому множество $[[0, D_A]] = \{(t, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \colon 0 \le t \le D_A(\omega)\} = (\mathbb{R}_+ \times \Omega) \setminus ((D_A, \infty))$ принадлежит $\mathcal{P}$ и $[[D_A]] = [[0, D_A]] \cap A \in \mathcal{P}$. По теореме 3.8.14 дебют D_A является предсказуемым марковским моментом. ◀

3.9. Измеримые случайные процессы

Имеется несколько видов измеримости, которыми могут обладать случайные процессы. В этом параграфе будут исследованы два вида измеримости. Предполагается, что все случайные процессы $X = \{X_t, t \in T\}$ определены на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и принимают значения в $\mathbb{R}^d$. В качестве параметрического множества T выступает произвольное борелевское множество вещественных чисел. Согласованность случайных процессов определяется относительно данной фильтрации $\mathbb{F}_T = \{\mathcal{F}_t \colon \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}, t \in T\}$. Обозначим $\mathcal{B}(T)$ и $\mathcal{B}(T_t)$ сигма-алгебры борелевских подмножеств множеств T и $T_t = (-\infty, t] \cap T$.

3.9.1. Определение. Случайный процесс $X = \{X_t, t \in T\}$ называется *измеримым,* если $\{(t, \omega) \in T \times \Omega \colon X_t(\omega) \in A\} \in \mathcal{B}(T) \otimes \mathcal{F}$ для любого борелевского множества $A \subseteq \mathbb{R}^d$.

3.9.2. Теорема. *Любой случайный процесс $X = \{X_t, t \in T\}$ со счетным множеством T измерим.*

▶ Для любых $t \in T$ и $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ прямоугольник $\{t\} \times \{X_t \in A\}$

принадлежит сигма-алгебре $\mathcal{B}(T) \otimes \mathcal{F}$. Отсюда следует, что

$\{(t, \omega) \in T \times \Omega \colon X_t(\omega) \in A\} = \cup_{t \in T}(\{t\} \times \{X_t \in A\}) \in \mathcal{B}(T) \otimes \mathcal{F}$. ◀

3.9.3. Теорема. *Все траектории измеримого случайного процесса $X = \{X_t, t \in T\}$ являются борелевскими функциями.*

▶ Требуется доказать, что $\{t \in T \colon X_t(\omega) \in A\} \in \mathcal{B}(T)$ для любых $\omega \in \Omega$ и $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Утверждение выполняется по теореме 1.7.2, так как траектория $X_t(\omega), t \in T$, является сечением в точке $\omega \in \Omega$ измеримой функции $X_t(\omega), (t, \omega) \in T \times \Omega$. ◀

3.9.4. Теорема. *Любой непрерывный слева (справа) случайный процесс $X = \{X_t, t \in T\}$ с выпуклым множеством T измерим.*

▶ Выпуклое множество T можно представить в виде объединения $T = \cup_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$ с $[a_n, b_n] \subseteq [a_{n+1}, b_{n+1}]$. Разобьем сегмент $[a_n, b_n]$ точками $a_n = t_{n,0} < t_{n,1} < \dots < t_{n,m_n} = b_n$ таким образом, что $\lim_{n\to\infty} \max_{1 \le k \le m_n}(t_{n,k} - t_{n,k-1}) = 0$. Положим $a_n = t_*$, если $t_* \in T$, и $b_n = t^*$, если $t^* \in T$, для всех $n \in \mathbb{N}$. Определим случайные процессы $X^{(n)} = \{X_t^{(n)}, t \in T\}$ и $Y^{(n)} = \{Y_t^{(n)}, t \in T\}$, положив,

$$X_t^{(n)} = \begin{cases} X_{a_n}, & \text{если } t \in T, t \le a_n, \\ X_{t_{n,k-1}}, & \text{если } t \in (t_{n,k-1}, t_{n,k}], k = 1, \dots, m_n, \\ X_{b_n}, & \text{если } t \in T, t > b_n; \end{cases}$$

$$Y_t^{(n)} = \begin{cases} X_{a_n}, & \text{если } t \in T, t < a_n, \\ X_{t_{n,k}}, & \text{если } t \in [t_{n,k-1}, t_{n,k}), k = 1, \dots, m_n, \\ X_{b_n}, & \text{если } t \in T, t \ge b_n. \end{cases}$$

Предположим, что случайный процесс X непрерывен слева. Для любого $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ множество $B = \{(t, \omega) \in T \times \Omega \colon X_t^{(n)} \in A\}$ принадлежит σ-алгебре $\mathcal{B}(T) \otimes \mathcal{F}$, так как его можно представить в виде объединения измеримых прямоугольников $T_{a_n} \times \{X_{a_n} \in A\}$, $(t_{n,k-1}, t_{n,k}] \times \{X_{t_{n,k-1}} \in A\}, k = 1, \dots, m_n, ((b_n, \infty) \cap T) \times \{X_{b_n} \in A\}$. Поэтому случайный процесс $X^{(n)}$ измерим. Случайный процесс X измерим по теореме 1.5.7, так как является поточечным пределом измеримых случайных процессов $X^{(n)}, n \in \mathbb{N}$.

Если случайный процесс X непрерывен справа, то можно доказать, что случайные процессы $Y^{(n)}, n \in \mathbb{N}$, измеримы и поточечно сходятся к X. По теореме 1.5.7 случайный процесс X измерим. ◀

3.9.5. Теорема. *Пусть случайный процесс $X = \{X_t, t \in T\}$ с выпуклым множеством T определен на полном вероятностном* *пространстве* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. *Если случайный процесс* X *почти всюду непрерывен слева* (*справа*), *то он имеет измеримую версию.*

► Предположим, например, что случайный процесс X почти всюду непрерывен слева. Существует множество $\Omega' \in \mathcal{F}$ единичной вероятности такое, что для любого $\omega \in \Omega'$ траектория $X_t(\omega), t \in T$, непрерывна слева. Определим непрерывный слева случайный процесс $Y = \{Y_t, t \in T\}$, положив

$$Y_t(\omega) = \begin{cases} X_t(\omega), & \text{если } t \in T, \omega \in \Omega', \\ x, & \text{если } t \in T, \omega \in \Omega \setminus \Omega', \end{cases}$$

где x – произвольная точка из $\mathbb{R}^d$. Случайные процессы Y и X эквивалентны. По теореме 3.9.4 случайный процесс Y измерим. ◄

3.9.6. Теорема. (i) *Пусть даны измеримый случайный процесс* $X = \{X_t, t \in T\}$ *и некоторая сигма-алгебра* $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. *Тогда для любой* $\mathcal{G}$-*измеримой случайной величины* τ *со значениями в* T *функция* X_τ *является случайным вектором.* (ii) *Если измеримый случайный процесс* X *ограничен, то функция* $\mathbb{E}X_t = (\mathbb{E}X_{1,t}, \ldots, \mathbb{E}X_{d,t}), t \in T$, *измерима относительно сигма-алгебры* $\mathcal{B}(T)$.

► В силу теоремы 1.5.3 можно считать. что $d = 1$. Доказательство будет проведено в несколько этапов.

1. Предположим, что $X = \{X_t, t \in T\}$ является индикаторной функцией $X_t(\omega) = \mathbb{1}_{A \times B}(t, \omega)$ некоторого прямоугольника со сторонами $A \in \mathcal{B}(T)$ и $B \in \mathcal{F}$. Функция $X_\tau = \mathbb{1}_A(\tau)\mathbb{1}_B$, будучи произведением двух случайных величин, является случайной величиной. Очевидно, что функция $\mathbb{E}X_t = \mathbb{1}_A(t)\mathbb{E}\mathbb{1}_B, t \in T$, измерима относительно сигма-алгебры $\mathcal{B}(T)$.

2. Докажем, что теорема справедлива для индикаторной функции $X_t(\omega) = \mathbb{1}_A(t, \omega), (t, \omega) \in T \times \Omega$, произвольного множества $A \in \mathcal{B}(T) \otimes \mathcal{F}$. Обозначим $\mathcal{L}$ класс множеств $A \in \mathcal{B}(T) \otimes \mathcal{F}$, для которых теорема справедлива. Убедимся, что $\mathcal{L}$ является λ-классом. Выше было доказано, что $T \times \Omega \in \mathcal{L}$. Если $A, B \in \mathcal{L}$ и $A \subset B$, то $B \setminus A \in \mathcal{L}$, так как разность $\mathbb{E}\mathbb{1}_{B \setminus A} = \mathbb{E}\mathbb{1}_B - \mathbb{E}\mathbb{1}_A$ двух измеримых функций является измеримой ($\mathcal{B}(T)$-измеримой). Аналогично разность $\mathbb{1}_{B\setminus A}(\tau, \cdot) = \mathbb{1}_B(\tau, \cdot) - \mathbb{1}_A(\tau, \cdot)$ двух случайных величин является случайной величиной. Если $A_n \in \mathcal{L}$ и $A_n \subseteq A_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $A = \cup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{L}$, так как функция $\mathbb{E}\mathbb{1}_A$ измерима относительно сигма-алгебры $\mathcal{B}(T)$ и функция $\mathbb{1}_A(\tau, \cdot)$ является случайной величиной по теореме 1.5.7. Теорема 1.5.7 применима, так как последовательности $\{\mathbb{E}\mathbb{1}_{A_n}\}_{n\geq 1}$ и $\{\mathbb{1}_{A_n}(\tau, \cdot)\}_{n\geq 1}$ сходятся к $\mathbb{E}\mathbb{1}_A$ и $\mathbb{1}_A(\tau, \cdot)$.

По доказанному выше класс измеримых прямоугольников $A \times B$ со сторонами $A \in \mathcal{B}(T)$ и $B \in \mathcal{F}$ содержится в $\mathcal{L}$. Он порождает сигма-алгебру $\mathcal{B}(T) \otimes \mathcal{F}$. По теореме Серпинского (теорема 1.2.7) выполняется равенство $\mathcal{L} = \mathcal{B}(T) \otimes \mathcal{F}$. Отсюда следует, что теорема справедлива для случайных процессов X вида

$$X = \sum_{k=1}^{m} c_l \mathbb{1}_{A_k}, c_k \in \mathbb{R}, A_k \in \mathcal{B}(T) \otimes \mathcal{F},$$

По предположению X является ограниченной, $\mathcal{B}(T) \otimes \mathcal{F}$-измермой функцией переменной $(t, \omega) \in T \times \Omega$. По следствию 1.5.10 существует последовательность $\{X^{(n)}\}_{n \geq 1}$ случайных процессов указанного вида, которая равномерно по $(t, \omega) \in T \times \Omega$ сходится к X. Отсюда следует, что последовательность $\{\mathbb{E}X_t^{(n)}\}_{n \geq 1}$ равномерно по $t \in T$ сходится к $\mathbb{E}X_t$. По теореме 1.5.7 функция $\mathbb{E}X_t, t \in T$, измерима относительно сигма-алгебры $\mathcal{B}(T)$. Аналогично, последовательность $\{X_\tau^{(n)}\}_{n \geq 1}$ равномерно по $\omega \in \Omega$ сходится к X_τ. По теореме 1.5.7 функция X_τ является случайной величиной.

3. Докажем, что функция X_τ является случайной величиной для любого измеримого случайного процесса $X = \{X_t, t \in T\}$. С этой целью заметим, что последовательность $\{X^{(n)}\}_{n \geq 1}$ ограниченных измеримых случайных процессов $X^{(n)} = \{X_t^{(n)}, t \in T\}$, $X_t^{(n)} = X_t \mathbb{1}_{\{|X| \leq n\}}$, сходится к X. Отсюда следует, что последовательность $\{X_\tau^{(n)}\}_{n \geq 1}$ сходится к Y_τ. По теореме 1.5.7 функция X_τ является случайной величиной. ◀

3.9.7. Определение. Случайный процесс $X = \{X_t, t \in T\}$ называется *прогрессивно измеримым* относительно фильтрации $\mathbb{F}_T$ или $\mathbb{F}_T$*-прогрессивно измеримым,* если он, как функция двух аргументов $(t, \omega) \in T \times \Omega$, измерим относительно сигма-алгебры $\mathcal{P}_{pg}$.

Говоря о $\mathbb{F}_T$-прогрессивно измеримых случайных процессах, часто опускают упоминание о фильтрации.

3.9.8. Теорема. *Случайный процесс $X = \{X_t, t \in T\}$ прогрессивно измерим относительно фильтрации $\mathbb{F}_T$ тогда и только тогда, когда он удовлетворяет следующему условию*

$$\{(s, \omega) \in T_t \times \Omega \colon X_s(\omega) \in A\} \in \mathcal{B}(T_t) \otimes \mathcal{F}_t \tag{3.9.1}$$

для любого $t \in T$ и для любого борелевского множества $A \subseteq \mathbb{R}^d$.

► Если случайный процесс X удовлетворяет условию (3.9.1), то $B = \{(s, \omega) \in T \times \Omega \colon X_s(\omega) \in A\} \in \mathcal{P}_{pg}$ для любого $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, так как $B \cap (T_t \times \Omega) = \{(s, \omega) \in (T_t \times \Omega) \colon X_s(\omega) \in A\} \in \mathcal{B}(T_t) \otimes \mathcal{F}_t$ для любого $t \in T$. Это означает, что случайный процесс X измерим относительно сигма-алгебры $\mathcal{P}_{pg}$. Если случайный процесс X прогрессивно измерим, то $B \in \mathcal{P}_{pg}$. Поэтому (по определению $\mathcal{P}_{pg}$) $\{(s, \omega) \in T_t \times \Omega \colon X_s(\omega) \in A\} = B \cap (T_t \times \Omega) \in \mathcal{B}(T_t) \otimes \mathcal{F}_t$ для любого $t \in T$. Это означает, что выполняется условие (3.9.1). ◄

Условие (3.9.1) можно пересказать следующим образом. Случайный процесс X называется $\mathbb{F}_T$-*прогрессивно измеримым*, если для любого $t \in T$ случайный процесс $\{X_s, s \in T_t\}$, определенный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$, измерим.

3.9.9. Теорема. *Любой случайный процесс $X = \{X_t, t \in T\}$, согласованный с фильтрацией $\mathbb{F}_T$ со счетным множеством T, прогрессивно измерим относительно $\mathbb{F}_T$.*

► Для любого $t \in T$ случайный процесс $\{X_s, s \in T_t\}$, определенный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$, измерим по теореме 3.9.2. Поэтому случайный процесс X прогрессивно измерим. ◄

3.9.10. Теорема. *Любой непрерывный слева (непрерывный справа) случайный процесс $X = \{X_t, t \in T\}$, согласованный с фильтрацией $\mathbb{F}_T$ с выпуклым множеством T, является $\mathbb{F}_T$-прогрессивно измеримым.*

► Для любого $t \in T$ случайный процесс $\{X_s, s \in T_t\}$, определенный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$, измерим по теореме 3.9.4. Поэтому случайный процесс X прогрессивно измерим. ◄

3.9.11. Замечание. (i) *Если случайный процесс является поточечным пределом некоторой последовательности прогрессивно измеримых (измеримых) случайных процессов, то он прогрессивно измерим (измерим).* (ii) *Линейная комбинация с вещественными коэффициентами конечного числа $\mathbb{F}_T$-прогрессивно измеримых (измеримых) случайных процессов является $\mathbb{F}_T$-прогрессивно измеримым (измеримым) случайным процессом.* (iii) *Случайный процесс $\{(X_{1,t}, \dots, X_{d,t}), t \in T\}$ прогрессивно измерим относительно фильтрации $\mathbb{F}_T$ тогда и только тогда, когда $\mathbb{F}_T$-прогрессивно измеримы все вещественные случайные процессы $\{X_{k,t}, t \in T\}, k = 1, \dots, d$.*

► Утверждение (i) фактически было доказано попутно с доказательством теорем 3.9.4 и 3.9.10. Оно также является следствием теоремы 1.5.7. Утверждение (ii) является следствием теоремы 1.5.11.

Утверждение (iii) является следствием теоремы 1.5.3. ◄

3.9.12. Теорема. *Пусть случайный процесс* $X = \{X_t, t \in T\}$ *с выпуклым множеством* T *определен на полном вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *и согласован с расширенной фильтрацией* $\mathbb{F}_T$. *Если случайный процесс* X *почти всюду непрерывен слева* (*справа*), *то он имеет* $\mathbb{F}_T$-*прогрессивно измеримую версию.*

► По предположению существует множество $\Omega' \in \mathcal{F}$ единичной вероятности, на котором случайный процесс X непрерывен слева (справа). Построим непрерывный слева (справа) случайный процесс $Y = \{Y_t, t \in T\}$, положив $Y_t(\omega) = X_t(\omega)$, если $\omega \in \Omega'$, и $Y_t(\omega) = x$, если $\omega \notin \Omega'$, где x – произвольная фиксированная точка из $\mathbb{R}^d$. Случайные процессы X и Y эквивалентны. Убедимся, что случайный процесс Y согласован с фильтрацией $\mathbb{F}_T$. Для любых $t \in T$ и $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ множества $\{X_t \in A\} \cap \Omega'$ и $\{Y_t \notin A\} \cap (\Omega \setminus \Omega')$ принадлежат сигма-алгебре $\mathcal{F}_t$, так как $\mathbb{P}\{\Omega \setminus \Omega'\} = 0$. Отсюда и из равенства $\{Y_t \in A\} = (\{X_t \in A\} \cap \Omega') \cup (\{Y_t \notin A\} \cap (\Omega \setminus \Omega'))$ следует, что $\{Y_t \in A\} \in \mathcal{F}_t$. По теореме 3.9.10 случайный процесс Y прогрессивно измерим относительно $\mathbb{F}_T$. ◄

3.9.13. Теорема. *Любой* $\mathbb{F}_T$-*прогрессивно измеримый случайный процесс* $\{X_t, t \in T\}$ *согласован с фильтрацией* $\mathbb{F}_T$ *и измерим.*

► Докажем, что случайный процесс $X = \{X_t, t \in T\}$ согласован с фильтрацией $\mathbb{F}_T$. С этой целью заметим, что для любых $t \in T$ и $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ прообраз $\{X_t \in A\}$ множества A является t-сечением множества $\{(s, \omega) \in T_t \times \Omega\colon X_s(\omega) \in A\} \in \mathcal{B}(T_t) \otimes \mathcal{F}_t$. По 1.7.2 множество $\{X_t \in A\}$ принадлежит σ-алгебре $\mathcal{F}_t$. Это означает, что X согласован с $\mathbb{F}_T$.

Докажем, что случайный процесс X измерим. Пусть $T \ni t_n \uparrow t^*$ при $n \uparrow \infty$. Если $t^* \in T$, то следует положить $t_n = t^*$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Так как случайный процесс X является $\mathbb{F}_T$-прогрессивно измеримым, то $A_n = \{(t, \omega) \in T_{t_n} \times \Omega\colon X_t(\omega) \in A\} \in \mathcal{B}(T_{t_n}) \otimes \mathcal{F}_{t_n}$ и, следовательно, $\{(t, \omega) \in T \times \Omega\colon X_t(\omega) \in A\} = \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}(T) \otimes \mathcal{F}$ для любого борелевского множества $A \subseteq R^d$. ◄

3.9.14. Определение. Пусть даны $\mathbb{F}_T$-марковский момент τ, произвольная $\sigma(\mathcal{F}_t, t \in T)$-измеримая функция $X_\infty\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$ и случайный процесс $X = \{X_t, t \in T\}$. Функция $X_\tau\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$,

$$X_\tau(\omega) = \begin{cases} X_{\tau(\omega)}(\omega), & \text{если } \tau(\omega) < \infty, \\ X_\infty(\omega), & \text{если } \tau(\omega) = \infty, \end{cases}$$

называется *значением* X в марковский момент τ.

3.9.15. Теорема. *Если случайный процесс* $X = \{X_t, t \in T\}$ *прогрессивно измерим относительно фильтрации* $\mathbb{F}_T$, *то его значение* X_τ *в любой* $\mathbb{F}_T$*-марковский момент* τ *измеримо относительно сигма-алгебры* $\mathcal{F}_\tau$.

► Требуется доказать, что $\{X_\tau \in A\} \in \mathcal{F}_\tau$ для любого борелевского множества $A \subseteq \mathbb{R}^d$. По определению 3.6.8 сигма-алгебры $\mathcal{F}_\tau$ достаточно доказать, что $\{X_\tau \in A\} \cap \{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t$ для любого $t \in T$. Заметим, что $\{X_\tau \in A\} \cap \{\tau \le t\} = \{X_{\tau \wedge t} \in A\} \cap \{\tau \le t\}$ и $\{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t$. Случайный процесс $\{X_s, s \in T_t = T \cap (-\infty, t]\}$, определенный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$, измерим относительно сигма-алгебры $\mathcal{B}(T_t) \otimes \mathcal{F}_t$. Марковский момент $\tau \wedge t$ принимает значения в множестве T_t. По теореме 3.9.6 функция $X_{\tau \wedge t}$ измерима относительно сигма-алгебры $\mathcal{F}_t$. Поэтому $\{X_{\tau \wedge t} \in A\} \in \mathcal{F}_t$ и, следовательно, $\{X_\tau \in A\} \cap \{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t$. ◄

Индикаторная функция $\mathbb{1}_A$ любого множества $A \in \mathcal{B}(T) \otimes \mathcal{F}$ является измеримым случайным процессом. Ниже приведен список некоторых множеств, индикаторные функции которых являются прогрессивно измеримыми случайными процессами.

3.9.16. Определение. Пусть даны любые марковские моменты τ и σ относительно фильтрации $\mathbb{F}_T$ с выпуклым множеством T. Множества следующих видов

$[[\tau, \sigma]] = \{(t, \omega) \in T \times \Omega \colon \tau(\omega) \le t \le \sigma(\omega)\}$,

$((\tau, \sigma]] = \{(t, \omega) \in T \times \Omega \colon \tau(\omega) < t \le \sigma(\omega)\}$,

$[[\tau, \sigma)) = \{(t, \omega) \in T \times \Omega \colon \tau(\omega) \le t < \sigma(\omega)\}$,

$((\tau, \sigma)) = \{(t, \omega) \in T \times \Omega \colon \tau(\omega) < t < \sigma(\omega)\}$ называются *стохастическими отрезками.*

Подчеркнем, что стохастический отрезок является подмножеством прямого произведения $T \times \Omega$. Поэтому точки (t_*, ω), если $t_* \notin T$, и (t^*, ω), если $t^* \notin T$, не могут принадлежать никакому стохастическому отрезку. При определении стохастических отрезков не предполагается, чтобы правая граница превосходила левую границу. Например, точка (t, ω) принадлежит $[[\tau, \sigma]]$, если $\tau(\omega) \le t \le \sigma(\omega)$, и не принадлежит $[[\tau, \sigma]]$, если $\sigma(\omega) < \tau(\omega)$.

Докажем, что индикаторная функция любого стохастического отрезка A является $\mathbb{F}_T$-прогрессивно измеримым случайным процессом. Обозначим $X = \{X_t, t \in T\}, X_t(\omega) = \mathbb{1}_A(t, \omega), (t, \omega) \in T \times \Omega$. Докажем, что случайный процесс X согласован с фильтрацией $\mathbb{F}_T$. Достаточно доказать, что $\{X_t = 1\} \in \mathcal{F}_t$ для любого $t \in T$, так как случайная величина X_t может принимать только два значения – ноль и единица. Если, например, $A = ((\tau, \sigma))$, то $\{X_t = 1\} \in \mathcal{F}_t$, так как $\{X_t = 1\} = \{\tau < t < \sigma\} = \{t < \sigma\} \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Эти рассуждения применимы для любого стохастического отрезка.

Траектории случайного процесса $X = \mathbb{1}_A$ непрерывны слева, если $A = ((\tau, \sigma]]$, и непрерывны справа, если $A = [[\tau, \sigma))$. В обоих случаях случайный процесс $X = \mathbb{1}_A$ прогрессивно измерим по теореме 3.9.10. Функция $\zeta\colon \Omega \to T \cup \{\infty\}$, тождественно равная бесконечности, является $\mathbb{F}_T$-марковским моментом. Из очевидных равенств $((\tau, \sigma)) = ((\tau, \infty)) \setminus [[\sigma, \infty))$ и $[[\tau, \sigma]] = [[\tau, \infty)) \setminus ((\sigma, \infty))$ следует, в силу замечания 3.9.11, что случайные процессы $X = \mathbb{1}_{((\tau,\sigma))}$ и $X = \mathbb{1}_{[[\tau,\sigma]]}$ прогрессивно измеримы.

Существует $\mathbb{F}_T$-согласованный случайный процесс, который не является $\mathbb{F}_T$-прогрессивно измеримым.

3.9.17. Пример. Пусть $\Omega = [0, 1], \mathcal{F}$ – сигма-алгебра, порожденная конечными подмножествами сегмента $[0, 1]$. Определим вероятность $\mathbb{P}\colon \mathcal{F} \to [0, 1]$, положив $\mathbb{P}\{A\} = 0$ для любого конечного или счетного множества $A \in \mathcal{F}$ и $\mathbb{P}\{A\} = 1$ для любого несчетного множества $A \in \mathcal{F}$. Вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ является полным. Действительно, если $\mathbb{P}\{A\} = 0$ для некоторого $A \in \mathcal{F}$, то множество A конечно или счетно. Любое его подмножество B не более чем счетно и, следовательно, принадлежит сигма-алгебре $\mathcal{F}$.

Обозначим $T = [0, 1]$ и $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}$ для любого $t \in T$. Индикаторная функция $\mathbb{1}_B$ множества $B = \{(t, \omega) \in T \times \Omega\colon t = \omega\}$ согласована с фильтрацией $\mathbb{F}_T = \{\mathcal{F}_t, t \in T\}$. Убедимся, что случайный процесс $\mathbb{1}_B$ не является $\mathbb{F}_T$-прогрессивно измеримым. Если он $\mathbb{F}_T$-прогрессивно измерим, то $B \in \mathcal{P}_{pg}$ и, следовательно, множество $C = B \cap (T_{1/2} \times \Omega) = B \cap ([0, 1/2] \times \Omega)$ должно принадлежать σ-алгебре $\mathcal{B}([0, 1/2]) \otimes \mathcal{F}$. Проекция множества C на Ω, как нетрудно видеть, равна $[0, 1/2]$. По теореме 3.8.3 проекция множества C должна принадлежать сигма-алгебре $\mathcal{F}$. Однако множество $[0, 1/2]$ не принадлежит $\mathcal{F}$, и, следовательно, случайный процесс $\mathbb{1}_B$ не является прогрессивно измеримым.

3.10. Предсказуемые случайные процессы

Прогрессивно измеримые случайные процессы составляют часть измеримых случайных процессов. Среди прогрессивно измеримых случайных процессов выделяют предсказуемые случайные процессы, которые играют важную роль в общей теории случайных процессов и в теории стохастического интегрирования. В этом параграфе будут исследованы некоторые свойства названных случайных процессов. Предполагается, что все рассматриваемые случайные процессы $X = \{X_t,\ t \geq 0\}$, о которых пойдет речь, определены на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и принимают значения в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$. Понятия марковского момента и согласованности случайных процессов определяются относительно фильтрации $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t \colon \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}, t \geq 0\}$.

3.10.1. Определение. Случайный процесс $X = \{X_t, t \geq 0\}$ называется *предсказуемым,* если он $\mathcal{P}$-измерим, другими словами, если $\{(t, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \colon X_t(\omega) \in A\} \in \mathcal{P}$ для любого $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

3.10.2. Теорема. *Предсказуемая* σ*-алгебра* $\mathcal{P}$ *совпадает с наименьшей* σ*-алгеброй* $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$, *относительно которой измеримы все* $\mathbb{F}$*-согласованные, непрерывные слева случайные процессы.*

► При доказательстве равенства $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$ можно считать, что $d = 1$. Напомним, что в силу теоремы 1.5.3 случайный процесс $X = \{(X_{1,t}, \ldots, X_{d,t}), t \geq 0\}$ измерим относительно сигма-алгебры $\mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда каждый вещественный случайный процесс $\{X_{k,t}, t \geq 0\}$ измерим относительно $\mathcal{P}$. Это утверждение также справедливо при замене сигма-алгебры $\mathcal{P}$ на сигма-алгебру $\mathcal{P}'$.

Докажем, что $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}'$. Для этого достаточно доказать, что любой предсказуемый прямоугольник A принадлежит σ-алгебре $\mathcal{P}'$. Если $A = \{0\} \times G$ с $G \in \mathcal{F}_0$ или $A = (\alpha, \beta] \times F$ с $0 \leq \alpha < \beta < \infty$ и $F \in \mathcal{F}_\alpha$, то случайный процесс $\mathbb{1}_A$ согласован с фильтрацией $\mathbb{F}$ и непрерывен слева. Поэтому случайный процесс $\mathbb{1}_A$ измерим относительно сигма-алгебры $\mathcal{P}'$. Предсказуемый прямоугольник A, будучи прообразом борелевского множества $\{1\}$ относительно случайного процесса $\mathbb{1}_A$, принадлежит $\mathcal{P}'$.

Докажем, что $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}$. Достаточно доказать, что любой непрерывный слева, $\mathbb{F}$-согласованный случайный процесс $X = \{X_t, t \geq 0\}$ измерим относительно σ-алгебры $\mathcal{P}$. Определим случайный процесс $X^{(n)} = \{X_t^{(n)}, t \geq 0\}$ для любого $n \in \mathbb{N}$, положив

$$X_t^{(n)} = X_0 \mathbb{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} X_{(k-1)2^{-n}} \mathbb{1}_{((k-1)2^{-n}, k2^{-n}]}(t), t \in \mathbb{R}_+. \quad (3.10.1)$$

Заметим, что $\lim_{n\to\infty} X_t^{(n)} = X_t$ для любого $t \in \mathbb{R}_+$ в силу непрерывности слева случайного процесса X. Для любого $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ множество $\{(t,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega\colon X_{(k-1)2^{-n}}(\omega)\mathbb{1}_{((k-1)2^{-n},k2^{-n}]}(t) \in A\}$, а также множество $\{(t,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega : X_0(\omega)\mathbb{1}_{\{0\}}(t) \in A\}$ являются предсказуемыми прямоугольниками. Это означает, что каждое слагаемое ряда (3.10.1) является $\mathcal{P}$-измеримой функцией, и, следовательно, случайный процесс $X^{(n)}$ измерим относительно σ-алгебры $\mathcal{P}$. По теореме 1.5.7 случайный процесс X измерим относительно σ-алгебры $\mathcal{P}$, так как является пределом $\mathcal{P}$-измеримых случайных процессов. ◀

3.10.3. Теорема. (i) *Предсказуемая σ-алгебра $\mathcal{P}$ порождается множествами вида $[[\tau,\infty)) = \{(t,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega\colon \tau(\omega) < t\}$, где τ пробегает множество всех предсказуемых марковских моментов.* (ii) *Для любого предсказуемого марковского момента τ и для любого $\mathbb{F}$-марковского момента σ стохастические отрезки $[[\tau,\sigma]]$ и $((\sigma,\tau]]$ принадлежат $\mathcal{P}$.* (iii) *Для любых предсказуемых марковских моментов τ и σ стохастический отрезок $[[\tau,\sigma))$ принадлежит $\mathcal{P}$.*

▶ (i). Обозначим $\mathcal{P}''$ сигма-алгебру, порожденную множествами вида $[[\tau,\infty))$, где τ пробегает множество всех предсказуемых марковских моментов. При доказательстве теоремы 3.8.14 было установлено, что множество $[[\tau,\infty))$ принадлежит предсказуемой сигма-алгебре $\mathcal{P}$. Поэтому $\mathcal{P}'' \subseteq \mathcal{P}$.

Докажем, что $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}''$. Для этого достаточно доказать, что все предсказуемые прямоугольники принадлежат $\mathcal{P}''$. В примере 3.7.2 доказано, что для любых $\beta \geq 0$ и $F \in \mathcal{F}_\beta$ функция $\sigma = \beta\mathbb{1}_F + \infty\mathbb{1}_{F^c}$ является предсказуемым марковским моментом. Отсюда следует, что $[\beta,\infty) \times F = [[\sigma,\infty)) \in \mathcal{P}''$. В примере 3.7.2 также доказано, что для любого $\mathbb{F}$-марковского момента τ и для любого $n \in \mathbb{N}$ функция $\tau + 1/n$ является предсказуемым марковским моментом. Отсюда следует, что $((\tau,\infty)) = \cup_{n=1}^{\infty}[[\tau + 1/n,\infty)) \in \mathcal{P}''$. В частности, если $\tau = \alpha\mathbb{1}_F + \infty\mathbb{1}_{F^c}$ для некоторых $\alpha \geq 0$ и $F \in \mathcal{F}_\alpha$, то $(\alpha,\infty) \times F = ((\tau,\infty)) \in \mathcal{P}''$. В качестве следствия получается, что предсказуемый прямоугольник $(\alpha,\beta] \times F$ с $0 \leq \alpha < \beta$ и $F \in \mathcal{F}_\alpha$ принадлежит сигма-алгебре $\mathcal{P}''$, так как $(\alpha,\beta] \times F = ((\tau,\infty)) \setminus ((\sigma,\infty))$. Измеримый прямоугольник $\{0\} \times F$ с $F \in \mathcal{F}_0$ также принадлежит $\mathcal{P}''$, так как $\{0\} \times F = [[\sigma,\infty)) \setminus ((\sigma,\infty)) \in \mathcal{P}''$, где $\sigma = 0\mathbb{1}_F + \infty\mathbb{1}_{F^c}$. Тем самым доказано, что все предсказуемые прямоугольники принадлежат сигма-алгебре $\mathcal{P}''$ и $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}''$.

(ii). Утверждение фактически доказано в (i). Было доказано, что $[[\tau,\infty)) \in \mathcal{P}$ для любого предсказуемого марковского момента

τ и $((\sigma,\infty)) \in \mathcal{P}$ для любого $\mathbb{F}$-марковского момента σ. Поэтому множества $[[\tau,\sigma]] = [[\tau,\infty)) \setminus ((\sigma,\infty))$ и $((\sigma,\tau)) = ((\sigma,\infty)) \setminus [[\tau,\infty))$ принадлежат $\mathcal{P}$.

(iii). Для любых предсказуемых марковских моментов τ и σ стохастический отрезок $[[\tau,\sigma)) = [[\tau,\infty)) \setminus [[\sigma,\infty))$ принадлежит $\mathcal{P}$, так как является разностью двух предсказуемых множеств. ◀

3.10.4. Теорема. *Любой предсказуемый случайный процесс является прогрессивно измеримым.*

▶ Теорема фактически является следствием теоремы 3.8.9. Там было доказано, что $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}_{pg}$. ◀

3.10.5. Теорема. *Если случайный процесс $X = \{X_t, t \geq 0\}$ является предсказуемым, то для любого предсказуемого марковского момента τ функция $\mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}X_\tau$ является $\mathcal{F}_{\tau-}$-измеримой.*

▶ Предположим, что случайный процесс X непрерывен слева и согласован с фильтрацией $\mathbb{F}$. По теореме 3.9.10 случайный процесс X является прогрессивно измеримым. Возьмем любую предвещающую последовательность $\{\tau_n\}_{n\geq 1}$ для τ. Напомним, что $\tau_n \leq \tau$ и на множестве $\{\tau > 0\}$ выполняется строгое неравенство $\tau_n < \tau$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Поэтому $\tau_n < \infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Функция $X_{\tau_n} : \Omega \to \mathbb{R}^d$ измерима относительно сигма-алгебры $\mathcal{F}_{\tau_n}$ по теореме 3.9.15 и, следовательно, измерима относительно сигма-алгебры $\mathcal{F}_{\tau-}$ в силу теоремы 3.7.4. По теореме 3.6.10 функция τ измерима относительно $\mathcal{F}_{\tau-}$ и, следовательно, $\{\tau < \infty\} \in \mathcal{F}_{\tau-}$. Поэтому произведение $\mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}X_{\tau_n}$ является $\mathcal{F}_{\tau-}$-измеримой функцией. Так как случайный процесс X непрерывен слева, то $\mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}X_\tau = \lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}X_{\tau_n}$. По теореме 1.5.7 функция X_τ измерима относительно сигма-алгебры $\mathcal{F}_{\tau-}$.

Обозначим $\mathcal{L}$ класс множеств $A \in \mathcal{P}$, для которых функция $\mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}\mathbb{1}_A$ измерима относительно σ-алгебры $\mathcal{F}_{\tau-}$. Множество $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ принадлежит $\mathcal{L}$, так как его индикаторная функция, тождественно равная единице, $\mathcal{F}_{\tau-}$-измерима. Если $A, B \in \mathcal{L}$ и $A \subset B$, то $B \setminus A \in \mathcal{L}$, так как функция $\mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}\mathbb{1}_{B\setminus A} = \mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}\mathbb{1}_A$, будучи разностью $\mathcal{F}_{\tau-}$-измеримых функций, $\mathcal{F}_{\tau-}$-измерима. Если $A_n \in \mathcal{L}$ и $A_n \subseteq A_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{L}$, так как функция $\mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}\mathbb{1}_A = \lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}\mathbb{1}_{A_n}$ измерима относительно $\mathcal{F}_{\tau-}$ по теореме 1.5.7. Из сказанного следует, что $\mathcal{L}$ является λ-классом. Он содержит все предсказуемые прямоугольники, так как их индикаторные функции $\mathbb{F}$-согласованы и непрерывны слева. По теореме 1.2.7 выполняется равенство $\mathcal{L} = \mathcal{P}$.

По доказанному выше для любого предсказуемого множества A функция $\mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}\mathbb{1}_A$ является $\mathcal{F}_{\tau-}$-измеримой. По теореме 1.5.11 функция $\mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}X_\tau$ измерима относительно $\mathcal{F}_{\tau-}$ для любого простого предсказуемого случайного процесса $X = \{X_t, t \geq 0\}$,

$$X = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathbb{1}_{A_k}, c_k \in \mathbb{R}, A_k \in \mathcal{P}, k = 1, \ldots, n. \tag{3.10.2}$$

По следствию 1.5.10 для любого предсказуемого случайного процесса X существует последовательность $\{X^{(n)}\}_{n\geq 1}$ простых предсказуемых случайных процессов $\{X^{(n)}\} = \{X_t^{(n)}, t \geq 0\}$ такая, что $\lim_{n\to\infty} X_t^{(n)} = X_t$ для любого $t \in \mathbb{R}_+$. Отсюда, в свою очередь, следует, что $\lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}} X_\tau^{(n)} = \mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}X_\tau$. По теореме 1.5.7 функция $\mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}X_\tau$ измерима относительно сигма-алгебры $\mathcal{F}_{\tau-}$. ◀

3.10.6. Теорема. *Для любого $\mathbb{F}$-марковского момента τ и для любого предсказуемого процесса $X = \{X_t, t \geq 0\}$ случайный процесс $X^\tau = \{X_{t\wedge\tau}, t \geq 0\}$ является предсказуемым.*

▶ Предположим, что случайный процесс X непрерывен слева и согласован с фильтрацией $\mathbb{F}$. Тогда случайный процесс X^τ непрерывен слева и согласован с фильтрацией $\mathbb{F}$ по теореме 3.9.15. Поэтому X^τ является предсказуемым случайным процессом.

Напомним обозначение $\mathcal{R}$ класса предсказуемых прямоугольников. При доказательстве теоремы 3.10.5 было отмечено, что индикаторная функция $\mathbb{1}_A$ любого множества $A \in \mathcal{R}$ является непрерывным слева, $\mathbb{F}$-согласованным случайным процессом. Поэтому $(\mathbb{1}_A)^\tau$ является предсказуемым случайным процессом.

Обозначим $\mathcal{L}$ класс предсказуемых множеств $A \in \mathcal{P}$, для которых случайный процесс $(\mathbb{1}_A)^\tau$ является предсказуемым процессом. Докажем, что $\mathcal{L}$ является λ-классом. Множество Ω принадлежит $\mathcal{L}$, так как $(\mathbb{1}_\Omega)^\tau = \mathbb{1}_\Omega = 1$. Если $A, B \in \mathcal{L}$ и $A \subset B$, то $B \setminus A \in \mathcal{L}$, так как $(\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A)^\tau = (\mathbb{1}_B)^\tau - (\mathbb{1}_A)^\tau$ и разность двух предсказуемых процессов является предсказуемым процессом. Если $A_n \in \mathcal{L}$ и $A_n \subseteq A_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $A = \cup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{L}$, так как $(\mathbb{1}_A)^\tau = \lim_{n\to\infty}(\mathbb{1}_{A_n})^\tau$ и поточечный предел последовательности предсказуемых процессов является предсказуемым процессом. Тем самым доказано, что $\mathcal{L}$ является λ-классом. Так как $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}$, то по теореме Серпинского (теорема 1.2.7) $\mathcal{P} = \sigma(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{L}$ и, следовательно, $\mathcal{L} = \mathcal{P}$.

Если случайный процесс $X = \{X_t, t \geq 0\}$ имеет вид (3.10.2), то X^τ является предсказуемым процессом. По следствию 1.5.10 любой предсказуемый процесс X является поточечным пределом некоторой последовательности $\{X^{(n)}\}_{n\geq 1}$ случайных процессов указанного вида. Отсюда следует, что случайный процесс X^τ является предсказуемым процессом, так как $X^\tau = \lim_{n\to\infty}(X^{(n)})^\tau$. ◄

3.11. Момент первого попадания

Понятие первого попадания случайного процесса в данное множество является важным инструментом для исследования свойств случайных процессов. При некоторых условиях момент первого попадания является марковским моментом. Предполагается, что все рассматриваемые далее случайные процессы $X = \{X_t, t \in T\}$ определены на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и принимают значения в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$. Понятия согласованности и марковского момента определяются относительно данной фильтрации $\mathbb{F}_T = \{\mathcal{F}_t \colon \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}, t \in T\}$ с борелевским множеством $T \subseteq \mathbb{R}$.

3.11.1. Определение. Пусть даны множество $A \subseteq \mathbb{R}^d$ и случайный процесс $X = \{X_t,\, t \in T\}$. Функция $\tau_A \colon \Omega \to T \cup \{\infty\}$,

$$\tau_A(\omega) = \begin{cases} \inf\{t \in T \colon X_t(\omega) \in A\}, & \text{если } \omega \in \cup_{t\in T}\{X_t \in A\}, \\ \infty, & \text{если } \omega \in (\cup_{t\in T}\{X_t \in A\})^c, \end{cases}$$

называется *моментом первого попадания* случайного процесса X в множество A.

3.11.2. Теорема. *Если случайный процесс $X = \{X_t, t \in T\}$ согласован с фильтрацией $\mathbb{F}_T$ со счетным множеством T, то момент первого попадания τ_A случайного процесса X в любое борелевское множество $A \subseteq \mathbb{R}^d$ является $\mathbb{F}_T$-марковским моментом.*

► Если $t_* \in T$, то $\{\tau_A = t_*\} = \{X_{t_*} \in A\} \in \mathcal{F}_{t_*}$. Если $t \in T$ и $t > t_*$, то $\{\tau_A = t\} = \cap_{T\ni s<t}\{X_s \notin A\} \cap \{X_t \in A\} \in \mathcal{F}_t$. По теореме 3.6.3 функция τ_A является $\mathbb{F}_T$-марковским моментом. ◄

3.11.3. Пример. Пусть даны независимые, одинаково распределенные вещественные случайные величины $\xi_n, n \in \mathbb{N}$. Обозначим τ момент первого попадания последовательности $\{X_n\}_{n\geq 1}$ сумм $X_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ в множество $A = (-\infty, -a] \cup [b, \infty), a, b > 0$. Если $\mathbb{P}\{\xi_1 = 0\} < 1$, то существует $\gamma > 0$ такое, что $\mathbb{E}\exp\{\gamma\tau\} < \infty$.

► В силу условия $\mathbb{P}\{\xi_1 = 0\} < 1$ найдется число $\lambda > 0$ такое, что $\mathbb{P}\{\xi_1 \geq \lambda\} = \delta > 0$ или $\mathbb{P}\{\xi_1 \leq -\lambda\} = \delta > 0$. Предположим, например, что $\mathbb{P}\{\xi_1 \geq \lambda\} = \delta > 0$. Для любого $m \in \mathbb{N}, m > (a+b)/\lambda$, справедливы следующие соотношения

$$\mathbb{P}\{X_m > a+b\} \geq \mathbb{P}\{\xi_k \geq \lambda, k=1,\ldots,m, X_m > a+b\} = \\ = \mathbb{P}\{\xi_k \geq \lambda, k=1,\ldots,m\} = \delta^m.$$

Для любых $m,k \in \mathbb{N}, m > (a+b)/\lambda$, справедливы неравенства

$$\mathbb{P}\{\tau > km\} \leq \mathbb{P}\{-a < X_{rm} < b, r=1,\ldots,k\} \leq \\ \leq \mathbb{P}\{|X_m| \leq a+b, \max_{2\leq r\leq k} |X_{rm} - X_{(r-1)m}| \leq a+b\} = \\ = \mathbb{P}\{|X_m| \leq a+b\} \prod_{r=2}^{k} \mathbb{P}\{|X_{rm} - X_{(r-1)m}| \leq a+b\} \leq (1-\delta^m)^k.$$

Если $\delta = 1$, то τ ограничена числом m и $\mathbb{E}\exp\{\gamma\tau\} < \infty$ для любого $\gamma > 0$. Если $0 < \delta < 1$, то для любого $\gamma \in (0, -m^{-1}\ln(1-\delta^m))$ величина $\mathbb{E}\exp\{\gamma\tau\}$ конечна. Действительно,

$$\mathbb{E}\exp\{\gamma\tau\} \leq 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}(e^{\gamma\tau}\mathbb{1}_{\{km<\tau\leq(k+1)m\}}) \leq \\ \leq 1 + \sum_{k=0}^{\infty} e^{\gamma(k+1)m}\mathbb{P}\{km < \tau \leq (k+1)m\} \leq \\ \leq 1 + e^{\gamma m}\sum_{k=0}^{\infty} e^{k(\gamma m + \ln(1-\delta^m))} < \infty. \quad \blacktriangleleft$$

3.11.4. Теорема. *Пусть дан регулярный справа случайный процесс $X = \{X_t, t \in T\}$, согласованный с фильтрацией $\mathbb{F}_T$ с выпуклым множеством $T, t_* \in T$. Тогда для любого замкнутого множества $A \subseteq \mathbb{R}^d$ функция $\tau_A = \inf\{t \in T\colon X_t \in A$ или $X_{t-} \in A\}$ является $\mathbb{F}_T$-марковским моментом.*

► Функция $\rho(x,A) = \inf\{\|x-y\|\colon y \in A\}$, $x \in \mathbb{R}^d$, называется расстоянием между точкой x и множеством A. Нетрудно убедиться, что она непрерывна. Поэтому для любого $n \in \mathbb{N}$ множество $A_n = \{x \in \mathbb{R}^d\colon \rho(x,A) < 1/n\}$ является открытым. Обозначим $D_t = \{X_t \in A \text{ или } X_{t-} \in A\} \cup \bigcap_{n=1}^{\infty} \cup_{s\in\mathbb{Q}\cap[t_*,t)} \{\rho(X_s,A) < 1/n\}$. Множество D_t принадлежит σ-алгебре $\mathcal{F}_t$, так как оно является счетным объединением множеств из $\mathcal{F}_t$. Чтобы убедиться, что функция τ_A является $\mathbb{F}$-марковским моментом, достаточно доказать равенство

$$\{\tau_A \leq t\} = D_t \text{ для любого } t \in T. \tag{3.11.1}$$

Докажем сначала, что $\{\tau_A \leq t\} \subseteq D_t$. Пусть $\omega \in \{\tau_A \leq t\}$. Если $\tau_A(\omega) = t$, то $X_t(\omega) \in A$ и, следовательно, $\omega \in D_t$. Если $\tau_A(\omega) < t$, то найдутся числа $\mathbb{Q} \cap T \ni t_n < t, n \in \mathbb{N}$, такие, что $t_n \downarrow \tau_A(\omega)$. Так как случайный процесс X непрерывен справа, то $\lim_{n\to\infty} \rho(X_{t_n}(\omega), A) = 0$ и, следовательно, $X_{\tau_A}(\omega) \in A$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется $m_n \in \mathbb{N}$ такое, что $\rho(X_{t_k}(\omega), A) < 1/n$ для всех $k \geq m_n$. Это означает, что $\omega \in D_t$, другими словами, $\{\tau_A \leq t\} \subseteq D_t$.

Для доказательства равенства (3.11.1) достаточно убедиться, что $D_t \subseteq \{\tau_A \leq t\}$. Пусть $\omega \in D_t$. Если $X_t(\omega) \in A$, то $\tau(\omega) \leq t$. Если $X_t(\omega) \notin A$, то $\rho(X_{s_n}(\omega), A) < 1/n$ для бесконечного числа чисел $s_n \in Q, t_* \leq s_n < t, n \in \mathbb{N}$. Найдется монотонная подпоследовательность $\{s_{k_n}\}_{n\geq 1} \subseteq \{s_n\}_{n\geq 1}$, сходящаяся к некоторому $s \in T, s \leq t$. Так как случайный процесс X регулярен справа, то имеет место сходимость $\lim_{n\to\infty} X_{s_{k_n}}(\omega) = X_s(\omega) \in A$, если $s_{k,n} \downarrow s$, и $\lim_{k\to\infty} X_{s_n}(\omega) = X_{s-}(\omega) \in A$, если $s_{k_n} \uparrow s$. Тем самым доказано, что $D \subseteq \{\tau_A \leq t\}$. ◀

3.11.5. Следствие. *Пусть дан непрерывный случайный процесс $X = \{X_t, t \in T\}$, согласованный с фильтрацией $\mathbb{F}_T$ с выпуклым множеством $T, t_* \in T$. Тогда момент первого попадания τ_A случайного процесса X в любое замкнутое множество $A \subseteq \mathbb{R}^d$ является $\mathbb{F}_T$-марковским моментом.*

▶ В силу непрерывности случайного процесса X выполняется равенство $\inf\{t \in T\colon X_t \in A$ или $X_{t-} \in A\} = \inf\{t \in T\colon X_t \in A\}$. Следствие выполняется по теореме 3.11.4. ◀

3.11.6. Теорема. *Если непрерывный справа случайный процесс $X = \{X_t, t \in T\}$ согласован с непрерывной справа фильтрацией $\mathbb{F}_T$ с выпуклым множеством $T, t_* \in T$, то момент первого попадания τ_A случайного процесса X в любое открытое множество $A \subseteq \mathbb{R}^d$ является $\mathbb{F}_T$-марковским моментом.*

▶ Убедимся, что для любого $t \in T$ справедливо равенство

$$\{\tau_A < t\} = \cup_{s\in\mathbb{Q}\cap[t_*,t)}(\{X_{t_*} \in A\} \cup \{X_s \in A\}). \tag{3.11.2}$$

Очевидно, что множество справа является частью множества слева. Поэтому достаточно доказать, что множество слева является частью множества справа. Пусть $t \in T, t_* < t$, и $\tau_A(\omega) < t$ для некоторого $\omega \in \Omega$. Найдутся числа $t_n \in [t_*, t), n \in \mathbb{N}$, такие, что $X_{t_n} \in A$ и $t_n \downarrow \tau(\omega)$. Так как множество $\mathbb{Q} \cap [t_*, t)$ всюду плотно в $[t_*, t)$, то для любого t_n найдутся числа $s_{n,m} \in \mathbb{Q} \cap [t_*, t), m \in \mathbb{N}$, такие, что $t > s_{n,m} \downarrow t_n$ и $X_{s_{n,m}}(\omega) \to X_{t_n}(\omega)$ при $m \to \infty$. Поэтому $X_{s_{n,m}}(\omega) \in A$ для бесконечного числа $s_{n,m} \in [t_*, t)$, и, следовательно, ω принадлежит множеству справа в (3.11.2). Тем самым равенство (3.11.2) доказано. Множество справа в (3.11.2) принадлежит сигма-алгебре $\mathcal{F}_t$, так как $\{X_s \in A\} \in \mathcal{F}_s$ для любого $s \in T$. В силу равенства (3.11.2) множество $\{\tau_A < t\}$ принадлежит $\mathcal{F}_t$. Если $t^* \in T$, то $\{\tau_A = \infty\} = \cap_{t\in[t_*,t^*]}\{X_t \in A^c\}$. Так как все траектории случайного процесса X непрерывны справа, то выполняется равенство $\cap_{t\in[t_*,t^*]}\{X_t \in A^c\} = \cap_{t\in(t_*,t^*)\cap\mathbb{Q}}\{X_t \in A^c\} \cap \{X_{t_*} \in A^c\} \cap \{X_{t^*} \in A^c\}$. Последнее множество является пересечением счетного числа событий из $\mathcal{F}_{t^*}$, и, следовательно, $\{\tau_A = \infty\} \in \mathcal{F}_{t^*}$. По теореме 3.6.4 функция τ_A является $\mathbb{F}_T$-марковским моментом. ◄

3.11.7. Теорема. *Пусть дан регулярный справа случайный процесс* $X = \{X_t, t \geq 0\}$, *согласованный с непрерывной справа фильтрацией* $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t \colon \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}, t \geq 0\}$. *Тогда для любого* $c > 0$ *функции* $\tau_1 = \inf\{t \geq 0 \colon \|X_t - X_0\| > c\}, \tau_{n+1} = \inf\{t \geq 0 \colon t > \tau_n, \|X_t - X_{\tau_n}\| > c\}$, $n \in \mathbb{N}$, *являются* $\mathbb{F}$-*марковскими моментами.*

► По теореме 3.11.6 применительно к случайному процессу $\{X_t - X_0, t \geq 0\}$ функция τ_1 является $\mathbb{F}$-марковским моментом. Далее можно рассуждать по индукции. Предположим, что для некоторого $n \in \mathbb{N}$ функция τ_n является $\mathbb{F}$-марковским моментом. Нетрудно убедиться, что для любого $t > 0$ выполняется равенство

$$\{\tau_{n+1} < t\} = \cup_{\mathbb{Q}_+ \ni q < t}\{\tau_n < q, \|X_q - X_{\tau_n}\| > c\}. \tag{3.11.3}$$

Докажем, что каждое множество-слагаемое принадлежит σ-алгебре $\mathcal{F}_t$. С этой целью заметим, что

$$\begin{aligned}&\{\tau_n < q, \|X_q - X_{\tau_n}\| > c\} = \\ &\qquad = \cap_{m=1}^{\infty} \cup_{s\in\mathbb{Q}_+} \{\tau_n < s < q, s - \tau_n < 1/m, \|X_q - X_s\| > c\}.\end{aligned}$$

Каждое множество $\{\tau_n < s < q, s - \tau_n < 1/m, \|X_q - X_s\| > c\}$ принадлежит $\mathcal{F}_t$, так как τ_n является $\mathbb{F}$-марковским моментом и случайный процесс X согласован с фильтрацией $\mathbb{F}$. Множество $\{\tau_n < q, \|X_q - X_{\tau_n}\| > c\}$ принадлежит $\mathcal{F}_t$, так как является комбинацией счетного числа множеств из $\mathcal{F}_t$. В силу равенства (3.11.3) множество $\{\tau_{n+1} < t\}$ принадлежит $\mathcal{F}_t$. По теореме 3.6.4 функция τ_{n+1} является $\mathbb{F}$-марковским моментом. ◄

Более глубокие утверждения о моменте первого попадания можно доказать при дополнительных условиях на вероятностное пространство и фильтрацию.

3.11.8. Теорема. *Если вероятностное пространство* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *и фильтрация* $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t \colon \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}, t \geq 0\}$ *удовлетворяют обычным условиям, то момент первого попадания* τ_A *любого прогрессивно измеримого случайного процесса* $X = \{X_t, t \geq 0\}$ *в любое борелевское множество* $A \subseteq \mathbb{R}^d$ *является* $\mathbb{F}$*-марковским моментом.*

► Обратим внимание, что функция τ_A является дебютом множества $B = \{(s, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \colon X_s(\omega) \in A\}$. По теореме 3.9.8 множество B прогрессивно измеримо. По теореме 3.8.6 функция τ_A является $\mathbb{F}$-марковским моментом. Повторим сказанное более подробно. Для любого $t \in \mathbb{R}_+$ множество $\{\tau_A < t\}$ является проекцией множества $B \cap ([0, t) \times \Omega) \in \mathcal{B}_t \otimes \mathcal{F}_t$. По теореме 3.8.3 множество $\{\tau_A < t\}$ принадлежит сигма-алгебре $\mathcal{F}_t$. По теореме 3.6.4 функция τ_A является марковским моментом относительно фильтрации $\mathbb{F}_T$. ◄

Предположение о прогрессивной измеримости случайного процесса важно для справедливости теоремы 3.11.8.

3.11.9. Пример. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и $\mathbb{F}$ обозначают вероятностное пространство и фильтрацию, построенные в примере 3.9.17. Момент первого попадания τ_A случайного процесса X, построенного в примере 3.9.17, в одноточечное множество $A = \{1\}$ не является марковским моментом, так как $\{\tau_A \leq 1/2\} = [0, 1/2] \notin \mathcal{F} \in \mathbb{F}$.

3.11.10. Теорема. *Предположим, что вероятностное пространство* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *и фильтрация* $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t \colon \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}, t \geq 0\}$ *удовлетворяют обычным условиям.* (i) *Для любого предсказуемого непрерывного справа вещественного случайного процесса* $X = \{X_t, t \geq 0\}$ *и для любого* $c \in \mathbb{R}$ *функция* $\tau_c = \inf\{t \geq 0 \colon X_t \geq c\}$ *является предсказуемым* $\mathbb{F}$*-марковским моментом.* (ii) *Для любого предсказуемого непрерывного справа случайного процесса* $X = \{X_t, t \geq 0\}$ *и для любых* $c, d \in \mathbb{R}_+$*, функция* $\tau_{c,d} = \inf\{t \geq c \colon \|X_t - X_c\| \geq d\}$ *является предсказуемым* $\mathbb{F}$*-марковским моментом.*

► (i). По теореме 3.10.4 предсказуемый случайный процесс X прогрессивно измерим. Поэтому, в силу теоремы 3.11.8, функция τ_c является $\mathbb{F}$-марковским моментом. По теореме 3.10.3 стохастический отрезок $[[0, \tau_c]]$ принадлежит предсказуемой σ-алгебре $\mathcal{P}$. Множество $X^{-1}([c, \infty)) = \{(t, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \colon X_t(\omega) \geq c\}$, будучи прообразом борелевского множества $[c, \infty)$ относительно предсказуемого случайного процесса, принадлежит $\mathcal{P}$. Отсюда следует, что

$[[\tau_c]] = [[0,\tau]] \cap X^{-1}([c,\infty)) \in \mathcal{P}$. По теореме 3.8.14 функция τ_c является предсказуемым $\mathbb{F}$-марковским моментом.

(ii). Функция $\tau_{c,d}$ является суммой $\tau_{c,d} = c + \sigma$ числа $c > 0$ и функции $\sigma = \inf\{t \geq 0 : \|X_{t+c} - X_c\| \geq d\}$. Вещественный случайный процесс $\{\|X_{t+c} - X_c\|, t \geq 0\}$ является предсказуемым относительно фильтрации $\{\mathcal{F}_{t+c}, t \geq 0\}$. По доказанному в (i) функция σ является предсказуемым марковским моментом относительно фильтрации $\{\mathcal{F}_{t+c}, t \geq 0\}$. Убедимся, что функция $\tau_{c,d} = c + \sigma$ является предсказуемым $\mathbb{F}$-марковским моментом. Возьмем какую-нибудь предвещающую последовательность $\{\sigma_n\}_{n\geq 1}$ для σ и обозначим $\tau_n = c+\sigma_n$. Функция τ_n является $\mathbb{F}$-марковским моментом. Действительно, $\{\tau_n \leq t\} = \varnothing \in \mathcal{F}_t$ для $0 \leq t < c$ и $\{\tau_n \leq t\} = \{\sigma \leq t-c\} \in \mathcal{F}_t$ для $t \geq c$. Далее, последовательность $\{\tau_n\}_{n\geq 1}$ возрастает и сходится к функции $\tau_{c,d}$. На множестве $\{\tau_{c,d} > 0\} = \{\sigma > 0\}$ выполняется неравенство $\tau_n < \tau_{c,d}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Это означает, что последовательность $\{\tau_n\}_{n\geq 1}$ предвещает $\tau_{c,d}$. ◄

3.11.11. Задача. Пусть регулярный слева случайный процесс $X = \{X_t, t \in T\}$ согласован с непрерывной справа фильтрацией $\mathbb{F}_T$ с выпуклым множеством $T, t_* \in T$. Доказать, что момент первого попадания τ_A случайного процесса X в любое открытое множество $A \subseteq \mathbb{R}^d$ является $\mathbb{F}_T$-марковским моментом.

3.12. Равномерно интегрируемые процессы

Равномерная интегрируемость является полезным свойством, которым могут обладать случайные процессы. Предполагается, что все случайные процессы определены на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и принимают вещественные значения.

3.12.1. Определение. Случайный процесс $X = \{X_t, t \in T\}$ называется *равномерно интегрируемым,* если

$$\lim_{\lambda\to\infty} \sup_{t\in T} \int_{\{|X_t|>\lambda\}} |X_t|\, d\mathbb{P} = 0. \tag{3.12.1}$$

Заметим, что равномерно интегрируемый случайный процесс X является интегрируемым, другими словами, $\mathbb{E}|X_t| < \infty$ для всех $t \in T$.

3.12.2. Замечание. (i) *Любое конечное множество интегрируемых случайных величин равномерно интегрируемо.*
(ii) *Любая часть $\{X_t, t \in T' \subset T\}$ равномерно интегрируемого случайного процесса X равномерно интегрируема.*

► Оба утверждения непосредственно вытекают из определения равномерной интегрируемости. ◄

3.12.3. Замечание. *Пусть даны равномерно интегрируемый случайный процесс* $X = \{X_t, t \in T\}$ *и некоторый случайный процесс* $Y = \{Y_t, t \in T\}$. *Если для любого* $t \in T$ *выполняется неравенство* $|Y_t| \le |X_t|$ *п.в., то случайный процесс* Y *равномерно интегрируем.*

► Замечание является следствием следующих соотношений

$$\lim_{\lambda\to\infty} \sup_{t\in T} \int_{\{|Y_t|>\lambda\}} |Y_t|\, d\mathbb{P} \le \lim_{\lambda\to\infty} \sup_{t\in T} \int_{\{|X_t|>\lambda\}} |X_t|\, d\mathbb{P} = 0. \quad ◄$$

3.12.4. Следствие. *Пусть дан произвольный случайный процесс* $X = \{X_t, t \in T\}$. *Если случайный процесс* $X^+ = \{X_t^+, t \in T\}$ *равномерно интегрируем, то для любого* $a < 0$ *случайный процесс* $\{X_t \vee a, t \in T\}$ *равномерно интегрируем.*

► Следует воспользоваться неравенством $|X_t \vee a| \le X_t^+ + |a|$ и затем применить замечание 3.12.3. ◄

Следующая теорема содержит критерий равномерной интегрируемости случайных величин.

3.12.5. Теорема. *Случайный процесс* $X = \{X_t, t \in T\}$ *равномерно интегрируем тогда и только тогда, когда выполнены условия*: (i) $\sup_{t\in T} \mathbb{E}|X_t| < \infty$;
(ii) *для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что*

$$\sup_{A\in\mathcal{F}:\mathbb{P}\{A\}<\delta} \sup_{t\in T} \mathbb{E}(|X_t|\mathbb{1}_A) < \varepsilon. \tag{3.12.2}$$

► Предположим, что случайный процесс X является равномерно интегрируемым. Тогда $\sup_{t\in T} \mathbb{E}(|X_t|\mathbb{1}_{\{|X_t|>\lambda\}}) \le 1$ для некоторого $\lambda > 0$. Отсюда следует (i), так как

$$\mathbb{E}|X_t| = \mathbb{E}(|X_t|\mathbb{1}_{\{|X_t|\le\lambda\}}) + \mathbb{E}(|X_t|\mathbb{1}_{\{|X_t|>\lambda\}}) \le \lambda + 1.$$

В силу условия (3.12.1) для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\lambda > 0$ такое, что $\mathbb{E}(|X_t|\mathbb{1}_{\{|X_t|>\lambda\}}) < \varepsilon/2$ для всех $t \in T$. Отсюда следует условие (3.12.2) с $\delta = \varepsilon/(2\lambda)$, так как, для любых $t \in T$ и $A \in \mathcal{F}, \mathbb{P}\{A\} < \delta = \varepsilon/(2\lambda)$,

$$\int_A |X_t|\, d\mathbb{P} = \int_{A\cap\{|X_t|\le\lambda\}} |X_t|\, d\mathbb{P} + \int_{A\cap\{|X_t|>\lambda\}} |X_t|\, d\mathbb{P} \le$$
$$\le \lambda\mathbb{P}\{A\} + \int_{\{|X_t|>\lambda\}} |X_t|\, d\mathbb{P} < \varepsilon.$$

Предположим теперь, что выполняются условия (i) и (ii). Для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, для которого выполняется (3.12.2). В силу (i) и неравенства Маркова – Чебышева $\lambda\mathbb{P}\{|X_t| > \lambda\} \le \mathbb{E}|X_t|$ найдется $\lambda_0 > 0$ такое, что $\sup_{t\in T}\mathbb{P}\{|X_t| > \lambda_0\} < \delta$ и, в силу (3.12.2),

$$\limsup_{\lambda\to\infty}\sup_{t\in T}\int_{\{|X_t|>\lambda\}}|X_t|\,d\mathbb{P} < \varepsilon.$$

Отсюда следует (3.12.1), так как число $\varepsilon > 0$ можно взять произвольно малым. ◀

3.12.6. Следствие. *Если случайные процессы* $X = \{X_t, t \in T\}$ *и* $Y = \{Y_t, t \in T\}$ *равномерно интегрируемы, то случайные процессы* $X \pm Y = \{X_t \pm Y_t, t \in T\}$ *равномерно интегрируемы.*

3.12.7. Теорема. *Если расширенная случайная величина* ξ *интегрируема, то семейство* $\{\mathbb{E}(\xi|\mathcal{G})\colon \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}\}$, *где* $\mathcal{G}$*-сигма-алгебра, равномерно интегрируемо.*

► По теореме 2.5.4 выполняются неравенства

$$\mathbb{E}|\mathbb{E}(\xi|\mathcal{G})| \le \mathbb{E}\mathbb{E}(|\xi||\mathcal{G}) = \mathbb{E}|\xi|, |\mathbb{E}(\xi|\mathcal{G})| \le \mathbb{E}(|\xi||\mathcal{G}) \text{ п.в.}$$

Отсюда следует, что

$$\int\limits_{\{|\mathbb{E}(\xi|\mathcal{G})|>\lambda\}}|\mathbb{E}(\xi|\mathcal{G})|\,d\mathbb{P} \le \int\limits_{\{|\mathbb{E}(\xi|\mathcal{G})|>\lambda\}}\mathbb{E}(|\xi||\mathcal{G})\,d\mathbb{P} = \int\limits_{\{|\mathbb{E}(\xi|\mathcal{G})|>\lambda\}}|\xi|\,d\mathbb{P}$$

для любого $\lambda > 0$. По замечанию 3.12.2 интеграл справа стремится к нулю при $\lambda \to \infty$ равномерно по $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, так как

$$\mathbb{P}\{|\mathbb{E}(\xi|\mathcal{G})| > \lambda\} \le \frac{\mathbb{E}|\mathbb{E}(\xi|\mathcal{G})|}{\lambda} \le \frac{\mathbb{E}|\xi|}{\lambda} \to 0 \text{ при } \lambda \to \infty.$$

Семейство $\{\mathbb{E}(\xi|\mathcal{G})\colon \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}\}$ удовлетворяет условию (3.12.1). ◀

Имеется еще один критерий равномерной интегрируемости, принадлежащий Валле Пуссену (Charles Jean de la Vallée Possin).

3.12.8. Теорема. *Случайный процесс* $X = \{X_t, t \in T\}$ *равномерно интегрируем тогда и только тогда, когда существует измеримая функция* $\phi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *такая, что*

$$\sup_{t\in T}\mathbb{E}\phi(|X_t|) < \infty, \lim_{\lambda\to\infty}\phi(\lambda)/\lambda = \infty. \qquad (3.12.3)$$

► Предположим, что случайный процесс X равномерно интегрируем. Обозначим $\lambda_0 = 0$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется $\lambda_n > 0$

такое, что $\sup_{t\in T}\int_{\{|X_t|\geq\lambda_n\}}|X_t|d\mathbb{P} < 2^{-n}$. Числа λ_n, $n\in\mathbb{N}$, можно выбрать такими, что $2\lambda_n<\lambda_{n+1}$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Неотрицательная функция $g(\lambda)=\sum_{k=1}^{\infty}k\mathbb{1}_{[\lambda_{k-1},\lambda_k)}(\lambda), \lambda\in\mathbb{R}_+$, возрастает до бесконечности. Убедимся, что функция $\phi(\lambda)=\int_0^\lambda g(u)du$, $\lambda\in\mathbb{R}_+$, удовлетворяет условиям (3.12.3). Действительно,

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\lambda}\phi(\lambda)\geq\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\lambda}\int_{\lambda/2}^{\lambda}g(t)\,dt\geq\lim_{\lambda\to\infty}2^{-1}g(\lambda/2)=\infty.$$

Далее, для любого $t\in T$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\phi(|X_t|)&=\mathbb{E}\int_0^{|X_t|}g(\lambda)\,d\lambda=\mathbb{E}\int_0^{\infty}\mathbb{1}_{[0,|X_t|]}(\lambda)g(\lambda)\,d\lambda=\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}\int_{\lambda_{n-1}}^{\lambda_n}\mathbb{1}_{[0,|X_t|]}(\lambda)g(\lambda)\,d\lambda=\sum_{n=1}^{\infty}n\mathbb{E}\int_{\lambda_{n-1}}^{\lambda_n}\mathbb{1}_{[0,|X_t|]}(\lambda)\,d\lambda=\\&=\sum_{n=1}^{\infty}n\int_{\lambda_{n-1}}^{\lambda_n}\mathbb{P}\{|X_t|\geq\lambda\}\,d\lambda\leq\sum_{n=1}^{\infty}n\int_{\lambda_{n-1}}^{\infty}\mathbb{P}\{|X_t|\geq\lambda\}\,d\lambda.\end{aligned}$$

Интегрирование по частям приводит к равенству

$$\int_{\{|X_t|\geq\lambda_{n-1}\}}|X_t|\,d\mathbb{P}=\lambda_{n-1}\mathbb{P}\{|X_t|\geq\lambda_{n-1}\}+\int_{\lambda_{n-1}}^{\infty}\mathbb{P}\{|X_t|\geq\lambda\}\,d\lambda.$$

Отсюда, в силу выбора чисел λ_n, следует, что

$$\int_{\lambda_{n-1}}^{\infty}\mathbb{P}\{|X_t|\geq\lambda\}\,d\lambda\leq\int_{\{|X_t|\geq\lambda_{n-1}\}}|X_t|\,d\mathbb{P}\leq 2^{-(n-1)}, n\geq 2.$$

Из приведенных неравенств следует, что

$$\mathbb{E}\phi(|X_t|)\leq\sum_{n=1}^{\infty}n\int_{\lambda_{n-1}}^{\infty}\mathbb{P}\{|X_t|\geq\lambda\}\,d\lambda\leq\mathbb{E}|X_t|+\sum_{n=2}^{\infty}n2^{-(n-1)}.$$

Отсюда и из теоремы 3.12.5 следует (3.12.3).

Предположим теперь, что существует измеримая функция $\phi\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ со свойствами (3.12.3). Положим $c=\sup_{t\in T}\mathbb{E}\phi(|X_t|)+1$. Для любого $\varepsilon>0$ найдется $b>0$ такое, что $\phi(\lambda)/\lambda>c/\varepsilon$ для всех $\lambda>b$. Для любых $\lambda>b$ и $t\in T$ справедливы неравенства

$$\int_{\{|X_t|>\lambda\}}|X_t|\,d\mathbb{P}\leq\frac{\varepsilon}{c}\int_{\{|X_t|>\lambda\}}\phi(|X_t|)\,d\mathbb{P}\leq\varepsilon.$$

Отсюда следует (3.12.1), так как число $\varepsilon > 0$ можно взять произвольно малым. ◀

3.12.9. Теорема. *Пусть даны случайные величины X_n такие, что $\mathbb{E}|X_n|^p < \infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и для некоторого $p > 0$.*
(i) *Если последовательность $\{|X_n|^p\}_{n\geq 1}$ равномерно интегрируема и последовательность $\{X_n\}_{n\geq 1}$ сходится по вероятности к некоторой случайной величине, то $\mathbb{E}|X|^p < \infty$ и*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}|X_n - X|^p = 0. \tag{3.12.4}$$

(ii) *Если условие* (3.12.4) *выполняется, то $\mathbb{E}|X|^p < \infty$, последовательность $\{X_n\}_{n\geq 1}$ сходится по вероятности к X, последовательность $\{|X_n|^p\}_{n\geq 1}$ равномерно интегрируема.*

▶ (i). По теореме 1.5.14 найдется последовательность $\{X_{k_n}\}_{n\geq 1}$, сходящаяся п.в. к X. По теореме 1.6.4 выполняются неравенства $\mathbb{E}|X|^p \leq \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}|X_{k_n}|^p \leq \sup_{n\geq 1} \mathbb{E}|X_n|^p < \infty$. В силу неравенства $|X_n - X|^p \leq 2^p(|X_n|^p + |X|^p)$, замечания 3.12.3 и следствия 3.12.6 последовательность $\{|X_n - X|^p\}_{n\geq 1}$ равномерно интегрируема. Поэтому, в силу (3.12.1), для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\lambda > 0$ такое, что $\mathbb{E}(|X_n - X|^p \mathbb{1}_{\{|X_n - X| > \lambda\}}) < \varepsilon$ для всех $n \in \mathbb{N}$. К последовательности $\{|X_n - X|^p \mathbb{1}_{\{|X_n - X| \leq \lambda\}}\}_{n\geq 1}$ применима теорема об ограниченной сходимости, по которой $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(|X_n - X|^p \mathbb{1}_{\{|X_n - X| \leq \lambda\}}) = 0$. Отсюда и из равенства

$$\mathbb{E}|X_n - X|^p = \mathbb{E}(|X_n - X|^p \mathbb{1}_{\{|X_n - X| \leq \lambda\}}) + \mathbb{E}(|X_n - X|^p \mathbb{1}_{\{|X_n - X| > \lambda\}})$$

следует, что $\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}|X_n - X|^p \leq \varepsilon$, и, следовательно, (3.12.4) выполняется, так как число $\varepsilon > 0$ можно взять произвольно малым.

(ii). Заметим, что $\mathbb{E}|X|^p \leq 2^p(\mathbb{E}|X_n|^p + \mathbb{E}|X_n - X|^p) < \infty$. В силу неравенства Маркова – Чебышева $\varepsilon^p \mathbb{P}\{|X_n - X| > \varepsilon\} \leq \mathbb{E}|X_n - X|^p$ для любого $\varepsilon > 0$ и условия (3.12.4) последовательность $\{X_n\}_{n\geq 1}$ сходится по вероятности к случайной величине X. Убедимся, что последовательность $\{|X_n - X|^p\}_{n\geq 1}$ удовлетворяет условиям теоремы 3.12.5. Действительно, из (3.12.4) следует, что $\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}|X_n - X|^p < \infty$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется $m \in \mathbb{N}$ такое, что $\sup_{n>m} \mathbb{E}|X_n - X|^p < \varepsilon/2$. Найдется $\delta > 0$ такое, что $\max_{1\leq n\leq m} \mathbb{E}(|X_n - X|^p \mathbb{1}_A) < \varepsilon$ для любого $A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}\{A\} < \delta$ и, следовательно, $\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}(|X_n - X|^p \mathbb{1}_A) < \varepsilon$. В силу неравенства $|X_n|^p \leq 2^p(|X|^p + |X_n - X|^p)$ и замечания 3.12.3 последовательность $\{|X_n|^p\}_{n\geq 1}$ равномерно интегрируема. ◀

3.12.10. Определение. Последовательность $\{X_n\}_{n\geq 1}$ интегрируемых случайных величин *сходится слабо* к интегрируемой случайной величине X, если $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n Y) = \mathbb{E}(XY)$ для любой ограниченной почти всюду случайной величины Y.

Любые два слабых предела X и X' для одной последовательности $\{X_n\}_{n\geq 1}$ почти всюду равны. Действительно, так как

$$\int_A X\,d\mathbb{P} = \int_\Omega X\mathbb{1}_A d\mathbb{P} = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega X_n\mathbb{1}_A\,d\mathbb{P} = \int_\Omega X'\mathbb{1}_A\,d\mathbb{P} = \int_A X'd\mathbb{P}$$

для любого $A \in \mathcal{F}$, то $X = X'$ п.в. в силу теоремы 1.6.15.

Следующая теорема представляет собой часть критерия Данфорда – Петтиса (Nelson James Dunford, Billy James Pettis) о слабой компактности семейств случайных величин.

3.12.11. Теорема. *Любая равномерно интегрируемая последовательность $\{X_n\}_{n\geq 1}$ случайных величин содержит некоторую подпоследовательность $\{X_{m_n}\}_{n\geq 1}$, которая сходится слабо к некоторой интегрируемой случайной величине X.*

► Доказательство теоремы будет разбито на несколько этапов. (i). Обозначим $\mathcal{F}_\infty = \sigma(X_n, n\in\mathbb{N})$ сигма-алгебру, порожденную прообразами $X_n^{-1}(A), n \in \mathbb{N}$, борелевских множеств $A \subseteq \mathbb{R}$. Докажем, что существует счетная алгебра $\mathcal{A}$, которая порождает $\mathcal{F}_\infty$. Обозначим $\mathcal{L}$ класс множеств вида $\{X_n < r, X_m \geq q\}, n, m, \in \mathbb{N}$, $r, q \in \mathbb{Q}$, и их дополнений, а также класс $\mathcal{M}$ всех конечных пересечений множеств из класса $\mathcal{L}$. Напомним, что $\mathbb{Q}$ обозначает множество всех рациональных чисел. Класс $\mathcal{A}$ всех конечных объединений из $\mathcal{M}$, как нетрудно видеть, является алгеброй. Она содержит счетное число множеств. Алгебра $\mathcal{A}$ является частью σ-алгебры $\mathcal{F}_\infty$ и, следовательно, $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{F}_\infty$. Чтобы доказать равенство $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\mathcal{A})$, достаточно убедиться, что $X_n^{-1}(A) \in \sigma(\mathcal{A})$ для любых $n \in \mathbb{N}$ и $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ класс $\mathcal{L}_n$ множеств $\{X_n < r\}, r \in \mathbb{Q}$, является π-классом и порождает сигма-алгебру $\mathcal{A}_n = \{X_n^{-1}(A) \colon A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. Множество $\{X_n < r\}$ принадлежит $\sigma(\mathcal{A})$, так как является объединением $\{X_n < r\} = \cup_{m=1}^\infty \{X_n < r, X_{n+1} > -m\}$ счетного числа множеств из класса $\mathcal{L}$. По теореме 1.2.7 справедливо включение $\mathcal{A}_n = \sigma(\mathcal{L}_n) \subseteq \sigma(\mathcal{A})$. Требуемое равенство $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\mathcal{A})$ доказано.

(ii). По теореме 3.12.5 величина $c = \sup_{n\geq 1}\mathbb{E}|X_n|$ конечна, так как последовательность $\{X_n\}_{n\geq 1}$ равномерно интегрируема. Запишем множества из алгебры $\mathcal{A}$ в виде последовательности $\{A_r\}_{r\geq 1}$. Последовательность $\{X_n\}_{n\geq 1}$ содержит некоторую подпоследовательность $\{X_{m_n^{(1)}}\}_{n\geq 1}$ такую, что последовательность $\{\mathbb{E}(X_{m_n^{(1)}}\mathbb{1}_{A_1})\}_{n\geq 1}$ сходится. В свою очередь последовательность $\{X_{m_n^{(1)}}\}_{n\geq 1}$ содержит некоторую подпоследовательность $\{X_{m_n^{(2)}}\}_{n\geq 1}$ такую, что последовательность $\{\mathbb{E}(X_{m_n^{(2)}}\mathbb{1}_{A_2})\}_{n\geq 1}$ сходится. Рассуждая подобным образом, можно построить последовательности $\{X_{m_n^{(r)}}\}_{n\geq 1}, r \in \mathbb{N}$, такие, что последовательность $\{X_{m_n^{(r+1)}}\}_{n\geq 1}$ является подпоследовательностью последовательности $\{X_{m_n^{(r)}}\}_{n\geq 1}$, и последовательность $\{\mathbb{E}(X_{m_n^{(r)}}\mathbb{1}_{A_r})\}_{n\geq 1}$ сходится. Отсюда следует, что диагональная последовательность $\{X_{m_n^{(n)}}\}_{n\geq 1}$, которую мы обозначим $\{X_{m_n}\}_{n\geq 1}$, обладает тем свойством, что для любого $A \in \mathcal{A}$ последовательность $\{\mathbb{E}(X_{m_n}\mathbb{1}_A)\}_{n\geq 1}$ сходится. Далее будет доказано, что последовательность $\{X_{m_n}\}_{n\geq 1}$ сходится слабо к некоторой интегрируемой случайной величине X.

Докажем, что последовательность $\{\mathbb{E}(X_{m_n}\mathbb{1}_A)\}_{n\geq 1}$ сходится для любого $A \in \mathcal{F}_\infty$. Обозначим $\mathcal{Z}$ класс множеств $A \in \mathcal{F}_\infty$, для которых последовательность $\{\mathbb{E}(X_{m_n}\mathbb{1}_A)\}_{n\geq 1}$ сходится. Докажем, что он является λ-классом. Класс $\mathcal{Z}$ содержит Ω, так как $\Omega \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{Z}$. Если $A, B \in \mathcal{Z}$ и $A \subset B$, то $B \setminus A \in \mathcal{Z}$, так как последовательность $\mathbb{E}(X_{m_n}\mathbb{1}_{B\setminus A}) = \mathbb{E}(X_{m_n}\mathbb{1}_B) - \mathbb{E}(X_{m_n}\mathbb{1}_A), n \in \mathbb{N}$, сходится. Если $A_m \in \mathcal{Z}$ и $A_m \subseteq A_{m+1}$ для всех $m \in \mathbb{N}$, то $A = \cup_{m=1}^{\infty} A_m \in \mathcal{Z}$. Убедимся в этом. По теореме 3.12.5 для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $\sup_{n\geq 1}\mathbb{E}(|X_n|\mathbb{1}_B) < \varepsilon/2$ для любого $B \in \mathcal{F}, \mathbb{P}\{B\} < \delta$. По теореме 1.4.3 справедливо равенство $\lim_{m\to\infty}\mathbb{P}\{A_m\} = \mathbb{P}\{A\}$. Поэтому найдется $m(\delta) \in \mathbb{N}$ такое, что $\mathbb{P}\{A \setminus A_{m(\delta)}\} < \delta$ и, следовательно, $\sup_{n\geq 1}\mathbb{E}(|X_{m_n}|\mathbb{1}_{A\setminus A_{m(\delta)}}) < \varepsilon/2$. Из очевидных соотношений $|\mathbb{E}(X_{m_n}\mathbb{1}_A) - \mathbb{E}(X_{m_n}\mathbb{1}_{A_{m(\delta)}})| = |\mathbb{E}(X_{m_n}\mathbb{1}_{A\setminus A_{m(\delta)}})| \leq \varepsilon/2$ и принадлежности множества $A_{m(\delta)}$ к классу $\mathcal{Z}$ следует, что

$$-\frac{1}{2}\varepsilon + \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(X_{m_n}\mathbb{1}_{A_{m(\delta)}}) \leq \liminf_{n\to\infty}\mathbb{E}(X_{m_n}\mathbb{1}_A) \leq$$
$$\leq \limsup_{n\to\infty}\mathbb{E}(X_{m_n}\mathbb{1}_A) \leq \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(X_{m_n}\mathbb{1}_{A_{m(\delta)}}) + \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Отсюда, в свою очередь, следует, что

$$0 \leq \limsup_{n\to\infty}\mathbb{E}(X_{m_n}\mathbb{1}_A) - \liminf_{n\to\infty}\mathbb{E}(X_{m_n}\mathbb{1}_A) \leq \varepsilon.$$

Число $\varepsilon > 0$ можно взять произвольно малым. Поэтому последовательность $\{\mathbb{E}(X_{m_n}\mathbb{1}_A)\}_{n\geq 1}$ сходится. Тем самым доказано, что $\mathcal{Z}$

является λ-классом. Он содержит алгебру $\mathcal{A}$. По теореме 1.2.7 справедливо включение $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{Z}$. Так как $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{F}_\infty$, то $\mathcal{Z} = \mathcal{F}_\infty$.

(iii). Обозначим $\mu\{A\} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_{m_n}\mathbb{1}_A)$ для $A \in \mathcal{F}_\infty$ и докажем, что функция μ является конечным зарядом. Функция μ ограничена числом $c = \sup_{n\geq 1} \mathbb{E}|X_n|$. Она конечно аддитивна, так как

$$\mu\{A\cup B\} \leftarrow \mathbb{E}(X_{m_n}\mathbb{1}_{A\cup B}) = (\mathbb{E}(X_{m_n}\mathbb{1}_A) + \mathbb{E}(X_{m_n}\mathbb{1}_B)) \to \mu\{A\} + \mu\{B\}$$

при $n \to \infty$ для любых непересекающихся множеств $A, B \in \mathcal{F}_\infty$. Докажем, что функция μ счетно аддитивна. По теореме 1.4.4 достаточно проверить, что функция μ непрерывна сверху на пустом множестве. Если $A_m \in \mathcal{F}_\infty$, $A_{m+1} \subseteq A_m$ для всех $m \in \mathbb{N}$ и $\cap_{m=1}^{\infty} A_m = \varnothing$, то $\lim_{m\to\infty} P\{A_m\} = 0$ по теореме 1.4.3. По теореме 3.12.5 для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}(|X_n|\mathbb{1}_B) < \varepsilon/2$ для любого $B \in \mathcal{F}, \mathbb{P}\{B\} < \delta$. Найдется $m(\delta) \in \mathbb{N}$ такое, что $\mathbb{P}\{A_m\} < \delta$ для всех $m \geq m(\delta)$ и, следовательно,

$$\limsup_{n\to\infty} |\mu\{A_m\}| \leq \sup_{m\geq m(\delta)} \mathbb{E}(|X_{m_n}|\mathbb{1}_{A_m}) \leq \varepsilon$$

и $\lim_{n\to\infty} \mu\{A_m\} = 0$, так как число $\varepsilon > 0$ можно взять произвольно малым. Тем самым доказано, что функция μ счетно аддитивна.

(iv). Докажем, что существует интегрируемая, $\mathcal{F}_\infty$-измеримая случайная величина X такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_{m_n}Y) = \mathbb{E}(XY) \tag{3.12.5}$$

для любой $\mathcal{F}_\infty$-измеримой, ограниченной п.в. случайной величины Y. Функция μ абсолютно непрерывна относительно вероятности $\mathbb{P}$, так как $\mu\{A\} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_{m_n}\mathbb{1}_A) = 0$ для любого множества $A \in \mathcal{F}_\infty$ нулевой вероятности. По теореме Радона – Никодима существует $\mathcal{F}_\infty$-измеримая, интегрируемая случайная величина X такая, что $\mu\{A\} = \int_A X\, d\mathbb{P}$ для любого $A \in \mathcal{F}_\infty$. По доказанному в (iii) утверждение (3.12.5) выполняется для индикаторной функции $Y = \mathbb{1}_A$ любого множества $A \in \mathcal{F}_\infty$. Действительно,

$$\mathbb{E}(X_{m_n}Y) = \mathbb{E}(X_{m_n}\mathbb{1}_A) \to \mu\{A\} = \int_A X\, d\mathbb{P} = \mathbb{E}(XY).$$

В силу свойства линейности интегралов утверждение (3.12.5) выполняется для любой простой случайной величины

$$Y = \sum_{k=1}^{m} c_k\mathbb{1}_{A_k}, c_k \in \mathbb{R}, A_k \in \mathcal{F}_\infty, k = 1, \ldots, m.$$

По следствию 1.5.10 для любой ограниченной, $\mathcal{F}_\infty$-измеримой случайной величины Y найдется последовательность $\{Y_m\}_{m\geq 1}$ простых, $\mathcal{F}_\infty$-измеримых случайных величин, которая сходится равномерно к Y. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется $m(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такое, что $|Y - Y_{m(\varepsilon)}| < \varepsilon$ и, следовательно, $|\mathbb{E}(X_{m_n}Y) - \mathbb{E}(X_{m_n}Y_{m(\varepsilon)})| \leq c\varepsilon$. Отсюда следует, что

$$-c\varepsilon + \mathbb{E}(XY_{m(\varepsilon)}) = -c\varepsilon + \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_{m_n}Y_{m(\varepsilon)}) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_{m_n}Y) \leq$$
$$\leq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_{m_n}Y) \leq \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_{m_n}Y_{m(\varepsilon)}) + c\varepsilon = \mathbb{E}(XY_{m(\varepsilon)}) + c\varepsilon.$$

С учетом неравенства $|\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(XY_{m(\varepsilon)})| \leq \varepsilon\mathbb{E}|X|$ мы получим

$$-\varepsilon(c + \mathbb{E}|X|) + \mathbb{E}(XY) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_{m_n}Y) \leq$$
$$\leq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_{m_n}Y) \leq \mathbb{E}(XY) + \varepsilon(c + \mathbb{E}|X|).$$

Отсюда следует (3.12.5), так как $\varepsilon > 0$ можно взять произвольно малым. Убедимся, что утверждение (3.12.5) выполняется для любой $\mathcal{F}_\infty$-измеримой, ограниченной п.в. случайной величины Y. Действительно, если $|Y| \leq c$ п.в. для некоторого $c > 0$, то $\{|Y| > c\} \in \mathcal{F}_\infty$ и $\mathbb{P}\{|Y| > c\} = 0$. Функция $Y' = Y\mathbb{1}_{\{|Y|\leq c\}}$ ограничена и $\mathcal{F}_\infty$-измерима, и, следовательно, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_{m_n}Y') = \mathbb{E}(XY') = \mathbb{E}(XY)$. Последнее равенство выполняется по теореме 1.6.8.

(v). Докажем утверждение (3.12.5) для любой ограниченной п.в. случайной величины Y. Напомним, что условное математическое ожидание $\mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_\infty)$ ограничено п.в. и $\mathcal{F}_\infty$-измеримо. Так как X_n и X являются $\mathcal{F}_\infty$- измеримыми случайными величинами, то по теореме 2.5.4 выполняются равенства $\mathbb{E}(X_nY) = \mathbb{E}(X_n\mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_\infty))$ и $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X\mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_\infty))$. Утверждение (3.12.5) справедливо для $\mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_\infty)$ вместо Y и, следовательно, при $n \to \infty$

$$\mathbb{E}(X_{m_n}Y) = \mathbb{E}(X_{m_n}\mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_\infty)) \to \mathbb{E}(X\mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_\infty)) = \mathbb{E}(XY). \quad \blacktriangleleft$$

3.12.12. Теорема. *Любая равномерно интегрируемая последовательность $\{X_n\}_{n\geq 1}$ случайных величин содержит некоторую подпоследовательность $\{X_{m_n}\}_{n\geq 1}$, средние арифметические которой сходятся в среднем*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\Big|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_{m_k} - X\Big| = 0 \tag{3.12.6}$$

к некоторой интегрируемой случайной величине X.

► Доказательство теоремы будет разбито на два этапа.

(i). Если все случайные величины $X_n, n \in \mathbb{N}$, ограничены некоторым числом $c > 0$, то существуют подпоследовательность $\{X_{m_n}\}_{n\geq 1}$ и случайная величина X такие, что $\mathbb{E}|X|^2 < \infty$ и

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\Big|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_{m_k} - X\Big|^2 = 0. \tag{3.12.7}$$

По теореме 3.12.11 ограниченная последовательность $\{X_n\}_{n\geq 1}$ содержит подпоследовательность, которая сходится слабо к некоторой случайной величине X с конечным абсолютным моментом $\mathbb{E}|X|$. Можно считать, что она сама слабо сходится к X. Из соотношений

$$\mathbb{E}(X^2 \mathbb{1}_{\{|X|\leq r\}}) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n X \mathbb{1}_{\{|X|\leq r\}}) \leq c\mathbb{E}|X|, r \in \mathbb{N},$$

следует, что $\mathbb{E}X^2 < \infty$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется $r \in \mathbb{N}$ такое, что $\mathbb{E}(|X_n X| \mathbb{1}_{\{|X|>r\}}) + \mathbb{E}(X^2 \mathbb{1}_{\{|X|>r\}}) < \varepsilon$. В силу слабой сходимости последовательности $\{X_n\}_{n\geq 1}$ к X и неравенства

$$\begin{aligned}|\mathbb{E}(X_n X) - \mathbb{E}X^2| \leq |\mathbb{E}(X_n X \mathbb{1}_{\{|X|\leq r\}}) - \mathbb{E}(X^2 \mathbb{1}_{\{|X|\leq r\}})| + \\ + |\mathbb{E}(X_n X \mathbb{1}_{\{|X|>r\}}) - \mathbb{E}(X^2 \mathbb{1}_{\{|X|>r\}})|\end{aligned}$$

следует, что $\limsup_{n\to\infty} |\mathbb{E}(X_n X) - \mathbb{E}X^2| \leq \varepsilon$. Так как число $\varepsilon > 0$ можно выбрать произвольно малым, то последовательность $\{\mathbb{E}(X_n X)\}_{n\geq 1}$ сходится к $\mathbb{E}X^2$.

Построим последовательность $\{X_{m_n}\}_{n\geq 1}$ со свойством (3.12.7). Обозначим $Y_n = X_n - X$ и заметим, что для любого $k \in \mathbb{N}$ последовательность $\{\mathbb{E}(Y_n Y_k)\}_{n\geq 1}$ сходится к нулю. Поэтому найдется $m_k \in \mathbb{N}$ такое, что $|\mathbb{E}(Y_n Y_k)| \leq 2^{-k}$ для всех $n \in \mathbb{N}, n \geq m_k$. Числа $m_k, k \in \mathbb{N}$, можно выбрать таким образом, что $m_k < m_{k+1}$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Убедимся, что последовательность $\{X_{m_k}\}_{k\geq 1}$ удовлетворяет условию (3.12.7). Вспомним, что $Y_n = X_n - X$ и $|X_n| \leq c$ по условию. Поэтому выполняется неравенство $\mathbb{E}|Y_n|^2 \leq \mathbb{E}(c+|X|)^2 \leq 2(c^2+\mathbb{E}X^2)$. Обозначим $\overline{Y}_n = (Y_{m_1} + \cdots + Y_{m_n})/n$ и заметим, что

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|\overline{Y}_n|^2 = \frac{1}{n^2}\Big(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}|Y_{m_k}|^2 + 2\sum_{r=2}^{n}\sum_{k=1}^{r-1} \mathbb{E}(Y_{m_k} Y_{m_r})\Big) \leq \\ \leq \frac{1}{n^2}\Big(2n(c^2 + \mathbb{E}X^2) + 2n\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\Big) \leq \frac{2(c^2 + \mathbb{E}X^2 + 1)}{n}.\end{aligned}$$

Отсюда следует утверждение (3.12.7).

(ii). Требуемое утверждение (3.12.6) будет выведено из утверждения (3.12.7) с помощью урезания случайных величин $X_n, n \in \mathbb{N}$. Обозначим $X_n^{(r)} = X_n \mathbb{1}_{\{|X_n| \le r\}}$ для $r, n \in \mathbb{N}$. С помощью знакомых рассуждений (см. доказательство утверждения (i)) можно построить последовательности $\{X_{m_n^{(r)}}\}_{n\ge1}, r \in \mathbb{N}$, такие, что последовательность $\{X_{m_n^{(r+1)}}\}_{n\ge1}$ является подпоследовательностью предыдущей последовательности $\{X_{m_n^{(r)}}\}_{n\ge1}$, и для каждого $r \in \mathbb{N}$ существует случайная величина $X^{(r)}$ такая, что $\mathbb{E}|X^{(r)}|^2$ и

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\Big|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X^{(r)}_{m_k^{(r)}} - X^{(r)}\Big|^2 = 0.$$

Диагональная последовательность $\{X_{m_n}\}_{n\ge1}$, где $X_{m_n} = X_{m_n^{(n)}}$, обладает тем свойством, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X^{(r)}_{m_k} - X^{(r)}|^2 = 0 \text{ для каждого } r \in \mathbb{N}. \qquad (3.12.8)$$

Обозначим $\overline{X}_n = (X_{m_1} + \dots + X_{m_n})/n$ и $\overline{X}_n^{(r)} = (X_{m_1}^{(r)} + \dots + X_{m_n}^{(r)})/n$. По условию последовательность $\{X_n\}_{n\ge1}$ равномерно интегрируема. По условию (3.12.1) для любого $\varepsilon > 0$ найдется $r_0 = r_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такое, что $\sup_{n\ge1} \mathbb{E}|X_n - X_n^{(r_0)}| < \varepsilon/2$. Из очевидного равенства

$$\overline{X}_n - \overline{X}_k = (\overline{X}_n - \overline{X}_n^{(r)}) + (\overline{X}_n^{(r)} - X^{(r)}) + (\overline{X}_k^{(r)} - \overline{X}_k) + (X^{(r)} - \overline{X}_k^{(r)})$$

для любых $r, n, k \in \mathbb{N}, r > r_0$, следуют неравенства

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|\overline{X}_n - \overline{X}_k| \le \mathbb{E}|\overline{X}_n - \overline{X}_n^{(r)}| + \mathbb{E}|\overline{X}_n^{(r)} - X^{(r)}| + \\ + \mathbb{E}|\overline{X}_k^{(r)} - \overline{X}_k| + \mathbb{E}|\overline{X}^{(r)} - \overline{X}_k^{(r)}| \le \\ \le \varepsilon + \mathbb{E}|\overline{X}_n^{(r)} - X^{(r)}| + \mathbb{E}|X^{(r)} - \overline{X}_k^{(r)}|.\end{aligned}$$

Отсюда, в силу (3.12.8), следует, что $\limsup_{n,k\to\infty} \mathbb{E}|\overline{X}_n - \overline{X}_k| \le \varepsilon$. Число $\varepsilon > 0$ можно взять произвольно малым, и, следовательно, $\lim_{n,k\to\infty} \mathbb{E}|\overline{X}_n - \overline{X}_k| = 0$. Это означает, что последовательность $\{\overline{X}_n\}_{n\ge1}$ фундаментальна в среднем и, следовательно, сходится в среднем к некоторой интегрируемой случайной величине X. ◄

Глава 4
Процессы с независимыми приращениями

Случайные процессы с независимыми приращениями имеют свои корни в классической теории вероятностей. Наиболее известными примерами являются пуассоновский процесс и процесс броуновского движения.

4.1. Независимые приращения

В этом разделе будет показано как свойство независимости приращений случайного процесса можно выразить в терминах естественной фильтрации случайного процесса. Предполагается, что все случайные процессы, о которых пойдет речь, определены на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и принимают значения в $\mathbb{R}^d$. Обозначим $T^{(s)} = [s, \infty) \cap T$ для любого $s \in T \subseteq \mathbb{R}$.

4.1.1. Определение. Случайный процесс $X = \{X_t, t \in T\}$ имеет *независимые приращения,* если для любых чисел $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, и $t_1 < \cdots < t_n$ из T случайные векторы $X_{t_1}, X_{t_k} - X_{t_{k-1}}, k = 2, \ldots, n$, независимы.

Совместное распределение случайных векторов $X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}$ взаимно однозначно определяется их совместной характеристической функцией $\mathbb{E}e^{i\sum_{k=1}^n \langle u_k, X_{t_k}\rangle}$, $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^d$. Из записи

$$\mathbb{E}e^{i\sum_{k=1}^n \langle u_k, X_{t_k}\rangle} = \mathbb{E}e^{i\langle v_1, X_{t_1}\rangle + i\sum_{k=2}^n \langle v_k, (X_{t_k} - X_{t_{k-1}})\rangle}, \tag{4.1.1}$$

где $v_k = \sum_{j=k}^n u_j, k = 1, \ldots, n$, следует, что совместное распределение случайных векторов $X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}$ однозначно определяются распределениями случайных векторов $X_{t_1}, X_{t_k} - X_{t_{k-1}}, k = 2, \ldots, n$. Если $t_* \in T$, то достаточно знать распределения случайного вектора X_{t_*} и разностей $X_t - X_s, s, t \in T, s < t$. Из определения 4.1.1 следует, что для любого фиксированного $u \in \mathbb{R}^d$ вещественный случайный процесс $\{\langle u, X_t\rangle, t \in T\}$ имеет независимые приращения.

Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_k$ и $0 \le t_1 < \cdots < t_n$ – независимые случайные векторы и любые фиксированные числа. Случайный процесс $\{X_t, t \ge 0\}, X_t = \sum_{t_j<t} \xi_j$ имеет независимые приращения.

Независимость приращений случайного процесса X можно выразить в терминах его естественных фильтраций $\mathbb{F}_T^{(X)}$ и $\mathcal{G}_T^{(X)}$ (см. определение 3.5.4 и текст за этим определением).

4.1.2. Теорема. *Пусть дан случайный процесс $X = \{X_t, t \in T\}$ с независимыми приращениями. Тогда для любого $s \in T, s < t^*$, случайный процесс $X = \{X_t - X_s, t \in T^{(s)}\}$ не зависит от каждой из сигма-алгебр $\mathcal{F}_s^{(X)}$ и $\mathcal{G}_s^{(X)}$.*

► В соответствии с определением 2.1.8 требуется доказать независимость сигма-алгебр $\mathcal{G} = \sigma(X_t - X_s, t \in T^{(s)})$ и $\mathcal{F}_s^{(X)}$. Сигма-алгебры $\mathcal{G}$ и $\mathcal{F}_s^{(X)}$ порождаются классами $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ событий вида $A = \{X_{t_k} - X_s \in A_k, k = 1, \ldots, n\}$ и $B = \{X_{s_k} \in B_k, k = 1, \ldots, m\}$, где $m, n \in \mathbb{N}$, $s_1 < \cdots < s_m \le s$ – произвольные числа из T и $s \le t_1 < \cdots < t_n$ – произвольные числа из $T^{(s)}$, $A_1, \ldots, A_n$ и $B_1, \ldots, B_m$ – произвольные множества из $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Каждый из классов $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ является π-классом. По теореме 2.1.5 сигма-алгебры $\mathcal{G} = \sigma(\mathcal{C})$ и $\mathcal{F}_s^{(X)} = \sigma(\mathcal{D})$ независимы, если независимы любые представители A и B классов $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$. Для этого достаточно доказать, что случайные векторы $X_{t_1} - X_s, \ldots, X_{t_n} - X_s$ и $X_{s_1}, \ldots, X_{s_m}$ независимы. Случайные векторы $X_{s_1}, \ldots, X_{s_m}$ являются линейными функциями случайных векторов $X_{s_1}, X_{s_2} - X_{s_1}, \ldots, X_{s_m} - X_{s_{m-1}}$. Случайные векторы $X_{t_1} - X_s, \ldots, X_{t_n} - X_s$ являются линейными функциями случайных векторов $X_{t_1} - X_s, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$. Множества $X_{t_1} - X_s, \ldots, X_{t_n} - X_s$ и $X_{s_1}, \ldots, X_{s_m}$ состоят из независимых случайных векторов, так как случайные векторы $X_{s_1}, X_{s_k} - X_{s_{k-1}}$, $k = 2, \ldots, m, X_{t_1} - X_s, X_{t_j} - X_{t_{j-1}}$, $j = 2, \ldots, n$, независимы.

Независимость случайного процесса $\{X_t - X_s, t \in T^{(s)}\}$ и сигма-алгебры $\mathcal{G}_s^{(X)}$ по определению означает независимость сигма-алгебр $\mathcal{G}$ и $\mathcal{G}_s^{(X)}$. Легко видеть, что класс $\mathcal{R}_s = \{A \cup B\colon A \in \mathcal{N}, B \in \mathcal{F}_s\}$ является π-классом. Из соотношений $\mathcal{N} \subseteq \sigma(\mathcal{R}_s)$, $\mathcal{F}_s \subseteq \sigma(\mathcal{R}_s)$, $\mathcal{R}_s \subseteq \mathcal{G}_s^{(X)}$ следует равенство $\mathcal{G}_s^{(X)} = \sigma(\mathcal{R}_s)$. По теореме 2.1.5 сигма-алгебры $\mathcal{G}$ и $\mathcal{G}_s^{(X)}$ независимы, если любые $C \in \mathcal{G}$ и $D \in \mathcal{R}_s$ независимы. Найдутся $A \in \mathcal{N}$ и $B \in \mathcal{F}_s$ такие, что $D = A \cup B$. По доказанному выше выполняется равенство $\mathbb{P}\{C \cap B\} = \mathbb{P}\{C\}\mathbb{P}\{B\}$. Так как

$\mathbb{P}\{C \cap D\} = \mathbb{P}\{C \cap B\}$ и $\mathbb{P}\{D\} = \mathbb{P}\{B\}$, то $\mathbb{P}\{C \cap D\} = \mathbb{P}\{C\}\mathbb{P}\{D\}$. Это означает, что события C и D независимы. ◄

4.1.3. Теорема. *Пусть случайный процесс $X = \{X_t, t \in T\}$ согласован с фильтрацией $\mathbb{F}_T = \{\mathcal{F}_t \colon \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}, t \in T\}$. Если для любого $s \in T, s < t^*$, случайный процесс $\{X_t - X_s, t \in T^{(s)}\}$ не зависит от сигма-алгебры $\mathcal{F}_s$, то X имеет независимые приращения.*

► В силу теоремы 2.1.12 достаточно доказать, что для любых $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, и $t_1 < \cdots < t_n$ из T совместная характеристическая функция случайных векторов $X_{t_1}, X_{t_k} - X_{t_{k-1}}, k = 2, \ldots, n$, равна произведению характеристических функций этих случайных векторов. Функция $e^{i\langle u_1, X_{t_1}\rangle}$ измерима относительно σ-алгебры $\mathcal{F}_{t_1}$. По условию для любых $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^d$ функция

$$e^{i\sum_{k=2}^{n}\langle u_k, (X_{t_k} - X_{t_{k-1}})\rangle} = e^{i\sum_{k=2}^{n}\langle u_k, ((X_{t_k} - X_{t_1}) - (X_{t_{k-1}} - X_{t_1}))\rangle}$$

не зависит от сигма-алгебры $\mathcal{F}_{t_1}$ и, следовательно, не зависит от функции $e^{i\langle u_1, X_{t_1}\rangle}$. Поэтому выполняется равенство

$$\mathbb{E}e^{i\langle u_1, X_{t_1}\rangle + i\sum_{k=2}^{n}\langle u_k, (X_{t_k} - X_{t_{k-1}})\rangle} = \mathbb{E}e^{i\langle u_1, X_{t_1}\rangle}\mathbb{E}e^{i\sum_{k=2}^{n}\langle u_k, (X_{t_k} - X_{t_{k-1}})\rangle}.$$

Аналогично по условию функция

$$e^{i\sum_{k=3}^{n}\langle u_k, (X_{t_k} - X_{t_{k-1}})\rangle} = e^{i\sum_{k=3}^{n}\langle u_k, ((X_{t_k} - X_{t_2}) - (X_{t_{k-1}} - X_{t_2}))\rangle}$$

не зависит от сигма-алгебры $\mathcal{F}_{t_2}$ и, следовательно, не зависит от функции $e^{i\langle u_2, (X_{t_2} - X_{t_1})\rangle}$. Поэтому выполняется равенство

$$\mathbb{E}e^{i\sum_{k=2}^{n}\langle u_k, (X_{t_k} - X_{t_{k-1}})\rangle} = \mathbb{E}e^{i\langle u_2, (X_{t_2} - X_{t_1})\rangle}\mathbb{E}e^{i\sum_{k=3}^{n}\langle u_k, (X_{t_k} - X_{t_{k-1}})\rangle}.$$

Через конечное число шагов мы придем к требуемому равенству

$$\mathbb{E}e^{i\sum_{k=1}^{n}\langle u_k, (X_{t_k} - X_{t_{k-1}})\rangle} = \prod_{k=1}^{n}\mathbb{E}e^{i\langle u_k, (X_{t_k} - X_{t_{k-1}})\rangle},$$

где $X_{t_0} = 0$ введено для краткости записи равенства. ◄

Пусть дана фильтрация $\mathbb{F}_T = \{\mathcal{F}_t \colon \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}, t \in T\}$ с выпуклым множеством T. Построим фильтрации $\mathbb{F}_{T+}$ и $\mathcal{G}_{T+}$, как указано перед определением 3.5.2 и теоремой 3.5.3.

4.1.4. Теорема. *Пусть дан стохастически непрерывный случайный процесс $X = \{X_t, t \in T\}$, согласованный с фильтрацией $\mathbb{F}_T$*

с выпуклым множеством T. Если для любого $s \in T, s < t^*$, случайный процесс $\{X_t - X_s, t \in T^{(s)}\}$ не зависит от σ-алгебры $\mathcal{F}_s$, то он не зависит от каждой из σ-алгебр $\mathcal{F}_{s+}$ и $\mathcal{G}_{s+}$.

► Для справедливости теоремы достаточно доказать, что случайный процесс $\{X_t - X_s, t \in T^{(s)}\}$ не зависит от σ-алгебры $\mathcal{G}_{s+}$, так как $\mathcal{F}_{s+} \subseteq \mathcal{G}_{s+}$. Случайный процесс $\{X_t - X_s, t \in T^{(s)}\}$ не зависит от σ-алгебры $\mathcal{F}_s$. Он также не зависит от σ-алгебры $\mathcal{G}_s$. Независимость $\mathcal{F}_s$ и $\{X_t - X_s, t \in T^{(s)}\}$ влечет независимость $\mathcal{G}_s$ и $\{X_t - X_s, t \in T^{(s)}\}$. Для любого $h \in (0, t^* - s)$ случайный процесс $\{X_{t+h} - X_{s+h}, t \in T^{(s+h)}\}$ не зависит от σ-алгебры $\mathcal{G}_{s+h}$ и, следовательно, не зависит от $\cap_{s+h \geq u > s} \mathcal{G}_u = \mathcal{G}_{s+}$. Поэтому для любых $n \in \mathbb{N}, t_1 < \cdots < t_n$ из $T^{(s)}$, $u \in \mathbb{R}$, $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^d$, $A \in \mathcal{G}_{s+}$ выполняется равенство

$$\mathbb{E} e^{i \sum_{k=1}^n \langle u_k, (X_{t_k+h} - X_{s+h}) \rangle + iu\mathbb{1}_A} = \mathbb{E} e^{i \sum_{k=1}^n \langle u_k, (X_{t_k+h} - X_{s+h}) \rangle} \mathbb{E} e^{iu\mathbb{1}_A}.$$

Здесь предполагается, что числа $t_1 + h, \ldots, t_n + h$ принадлежат $T^{(s)}$. Это условие выполняется для всех достаточно малых $h > 0$, если $t_n < t^*$. Если $t_n = t^* \in T$, то вместо $t_n + h$ следует взять t_n. При такой замене предыдущее равенство будет выполняться. Устремив $h = h_m \downarrow 0$ по некоторой последовательности, с помощью теоремы 1.6.18 можно убедиться, что

$$\mathbb{E} e^{i \sum_{k=1}^n \langle u_k, (X_{t_k+s} - X_s) \rangle + iu\mathbb{1}_A} = \mathbb{E} e^{i \sum_{k=1}^n \langle u_k, (X_{t_k+s} - X_s) \rangle} \mathbb{E} e^{iu\mathbb{1}_A}. \quad (4.1.2)$$

Теорема 1.6.18 применима, так как функции под знаком математического ожидания ограничены и

$$\lim_{m \to \infty} e^{i \sum_{k=1}^n \langle u_k, (X_{t_k+s+h} - X_{s+h}) \rangle} = e^{i \sum_{k=1}^n \langle u_k, (X_{t_k+s} - X_s) \rangle},$$

где предел понимается в смысле сходимости по вероятности. Формально следовало бы применить теорему 1.6.18 по отдельности к вещественной и мнимой частям функций. Равенство (4.1.2) означает, что случайные векторы $X_{t_k} - X_s, k = 1, \ldots, n$, не зависят от индикаторной функции $\mathbb{1}_A$. Другими словами, случайный процесс $\{X_t - X_s, t \in T_s\}$ не зависит от сигма-алгебры $\mathcal{G}_{s+}$. ◄

Теорема 4.1.4 помогает доказать важное свойство естественной фильтрации случайного процесса с независимыми приращениями.

4.1.5. Теорема. *Если случайный процесс $X = \{X_t, t \in T\}$ с независимыми приращениями с выпуклым множеством T стохастически непрерывен справа, то его расширенная естественная фильтрация $\mathcal{G}_T^{(X)}$ непрерывна справа.*

► Докажем сначала следующее равенство

$$\mathbb{E}(e^{i\sum_{k=1}^{n}\langle u_k, X_{t_k}\rangle}|\mathcal{G}_t^{(X)}) = \mathbb{E}(e^{i\sum_{k=1}^{n}\langle u_k, X_{t_k}\rangle}|\mathcal{G}_{t+}^{(X)}) \text{ п.в.} \qquad (4.1.3)$$

для любых $n \in \mathbb{N}, u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^d$ и $t, t_1 < \dots < t_n$ из T.

Пусть $t < t_1$. По теореме 4.1.2 функция $e^{i\sum_{k=1}^{n}\langle u_k, (X_{t_k} - X_t)\rangle}$ не зависит от σ-алгебры $\mathcal{G}_{t+}^{(X)}$. Функция $e^{i\sum_{k=1}^{n}\langle u_k, X_t\rangle}$ измерима относительно σ-алгебры $\mathcal{F}_t^{(X)}$. Отсюда следует, что

$$\mathbb{E}(e^{i\sum_{k=1}^{n}\langle u_k, X_{t_k}\rangle}|\mathcal{G}_{t+}^{(X)}) = \mathbb{E}(e^{i\sum_{k=1}^{n}\langle u_k, X_t\rangle + i\sum_{k=1}^{n}\langle u_k, (X_{t_k} - X_t)\rangle}|\mathcal{G}_{t+}^{(X)}) = \\ = e^{i\sum_{k=1}^{n}\langle u_k, X_t\rangle}\mathbb{E}e^{i\sum_{k=1}^{n}\langle u_k, (X_{t_k} - X_t)\rangle} \text{ п.в.}$$

Последнее равенство выполняется в силу теорем 2.5.4 и 2.5.8. Аналогично, если $t_r \le t < t_{r+1}$ для некоторого $r, 1 \le r < n$, то

$$\mathbb{E}(e^{i\sum_{k=1}^{n}\langle u_k, X_{t_k}\rangle}|\mathcal{G}_{t+}^{(X)}) = \\ = e^{i\sum_{k=1}^{r}\langle u_k, X_{t_k}\rangle + i\sum_{k=r+1}^{n}\langle u_k, X_t\rangle}\mathbb{E}e^{i\sum_{k=r+1}^{n}\langle u_k, (X_{t_k} - X_t)\rangle} \text{ п.в.}$$

В этих рассуждениях $\mathcal{G}_{t+}^{(X)}$ можно заменить на $\mathcal{G}_t^{(X)}$. Из приведенных равенств для условных математических ожиданий относительно $\mathcal{G}_{t+}^{(X)}$ и $\mathcal{G}_t^{(X)}$ следует (4.1.3). Если $t_n \le t$, то условные математические ожидания в (4.1.3) п.в. равны $\exp\{i\sum_{k=1}^{n}\langle u_k, X_{t_k}\rangle\}$.

Из (4.1.3) следует равенство $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{G}_t^{(X)}) = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{G}_{t+}^{(X)})$ п.в. для любой $\sigma(\mathcal{F}_t, t \in T)$-измеримой, ограниченной случайной величины ξ. Для индикаторной функции $\xi = \mathbb{1}_A$ любого $A \in \mathcal{G}_{t+}^{(X)}$ оно принимает вид $E(\mathbb{1}_A|\mathcal{G}_t^{(X)}) = \mathbb{1}_A$ п.в. Множество $B = \{\mathbb{E}(\mathbb{1}_A|\mathcal{G}_t^{(X)}) = \mathbb{1}_A\}$ является событием единичной вероятности. Так как $\mathbb{P}\{B^c\} = 0$, то $B, B^c, A \cap B^c \in \mathcal{G}_t^{(X)}$. Функция $\mathbb{1}_A = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A|\mathcal{G}_t^{(X)})\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_{A\cap B^c}$, будучи суммой двух $\mathcal{G}_t^{(X)}$-измеримых функций, $\mathcal{G}_t^{(X)}$-измерима. Поэтому $A \in \mathcal{G}_t^{(X)}$. Тем самым доказано, что $\mathcal{G}_{t+}^{(X)} \subseteq \mathcal{G}_t^{(X)}$. Отсюда и из соотношения $\mathcal{G}_t^{(X)} \subseteq \mathcal{G}_{t+}^{(X)}$ следует равенство $\mathcal{G}_{t+}^{(X)} = \mathcal{G}_t^{(X)}$. ◄

4.1.6. Замечание. Для доказательства упомянутого выше равенства $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{G}_t^{(X)}) = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{G}_{t+}^{(X)})$ п.в. для произвольной ограниченной $\sigma(\mathcal{F}_t, t \in T)$-измеримой случайной величины ξ, следует воспользоваться аналогом теоремы 2.3.5 для многомерных тригонометрических полиномов.

4.2. Неравенства

Пусть независимые случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_n$ определены на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Нам придется иметь дело с суммами $X_k = \xi_1 + \dots + \xi_k$, $k = 1, \dots, n$. Начнем с доказательства неравенства Оттавиани (Giuseppe Ottaviani).

4.2.1. Теорема. *Обозначим* $\gamma = \max_{1 \le k \le n} \mathbb{P}\{|X_n - X_k| > c\}$. *Для любых* $x > 0$ *и* $c > 0$ *справедливо неравенство*

$$(1-\gamma)\mathbb{P}\{\max_{1 \le k \le n} |X_k| > x + c\} \le \mathbb{P}\{|X_n| > x\}. \tag{4.2.1}$$

► События $A_k = \{\max_{1 \le j \le k-1} |X_j| \le x + c, |X_k| > x + c\}$, $k = 1, \dots, n$, попарно не пересекаются. Их объединение совпадает с событием $A = \{\max_{1 \le k \le n} |X_k| > x + c\}$. Для любого $k = 1, \dots, n$ события A_k и $\{|X_n - X_k| > c\}$ независимы. Заметим, что $A = \cup_{k=1}^n A_k$ и $A_k \cap \{|X_n - X_k| \le c\} \subseteq A_k \cap \{|X_n| > x\}$. Из неравенств

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{A\} = \sum_{k=1}^n (\mathbb{P}\{A_k \cap \{|X_n - X_k| \le c\}\} + \mathbb{P}\{A_k \cap \{|X_n - X_k| > c\}\}) \le \\
\le \sum_{k=1}^n \mathbb{P}\{A_k \cap \{|X_n| > x\}\} + \sum_{k=1}^n \mathbb{P}\{A_k\} P\{|X_n - X_k| > c\} \le \\
\le \mathbb{P}\{A \cap \{|X_n| > x\}\} + \gamma \mathbb{P}\{A\} \le \mathbb{P}\{|X_n| > x\} + \gamma \mathbb{P}\{A\}
\end{aligned}$$

следует требуемое неравенство (4.2.1). ◄

С помощью похожих рассуждений можно доказать неравенство Этемади (Nosrallah Etemadi).

4.2.2. Теорема. *Для любого* $x > 0$ *справедливо неравенство*

$$\mathbb{P}\{\max_{1 \le k \le n} |X_k| > 3x\} \le 3 \max_{1 \le k \le n} \mathbb{P}\{|X_k| > x\}. \tag{4.2.2}$$

► События $A_k = \{\max_{1 \le j < k} |X_j| \le 3x, |X_k| > 3x\}$, $k = 1, \dots, n$, попарно не пересекаются, и $A = \{\max_{1 \le k \le n} |X_k| > 3x\} = \cup_{k=1}^n A_k$. Для любого $k = 1, \dots, n$ события A_k и $\{|X_n - X_k| > 2x\}$ независимы и $A_k \cap \{|X_n| \le x\} \subseteq A_k \cap \{|X_k| - |X_n| > 2x\} \subseteq A_k \cap \{|X_n - X_k| > 2x\}$.

С помощью указанных соотношений можно убедиться, что

$$\mathbb{P}\{\{|X_n| \le x\} \cap A\} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\{\{|X_n| \le x\} \cap A_k\} \le$$
$$\le \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\{\{|X_n - X_k| > 2x\} \cap A_k\} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\{|X_n - X_k| > 2x\}\mathbb{P}\{A_k\} \le$$
$$\le \max_{1\le k\le n} \mathbb{P}\{|X_n - X_k| > 2x\} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\{A_k\}.$$

Так как $\mathbb{P}\{|X_n - X_k| > 2x\} \le 2\max_{1\le k\le n}\mathbb{P}\{|X_k| > x\}$, то

$$\mathbb{P}\{\{|X_n| \le x\} \cap A\} \le 2 \max_{1\le k\le n} \mathbb{P}\{|X_k| > x\}\mathbb{P}\{A\}.$$

Требуемое неравенство (4.2.2) следует из соотношений

$$\mathbb{P}\{A\} = \mathbb{P}\{\{|X_n| \le x\} \cap A\} + \mathbb{P}\{\{|X_n| > x\} \cap A\} \le$$
$$\le 2 \max_{1\le k\le n} \mathbb{P}\{|X_k| > x\} + \mathbb{P}\{|X_n| > x\}. \quad \blacktriangleleft$$

Следующие неравенства принадлежат Леви (Paul Pierre Lévy).

4.2.3. Теорема. *Предположим дополнительно, что случайные величины* $\xi_1, \dots, \xi_n$ *симметричны. Тогда для любого* $x > 0$

$$\mathbb{P}\{\max_{1\le k\le n} X_k > x\} \le 2\mathbb{P}\{X_n > x\}, \tag{4.2.3}$$

$$\mathbb{P}\{\max_{1\le k\le n} |X_k| > x\} \le 2\mathbb{P}\{|X_n| > x\}. \tag{4.2.4}$$

$\blacktriangleright$ Напомним, что случайная величина ξ называется симметричной, если она одинаково распределена со случайной величиной $-\xi$. Из двух неравенств достаточно доказать (4.2.3), так как из него следует неравенство (4.2.4). Обратим внимание, что множества $A_k = \{\max_{1\le j<k} X_j \le x, X_k > x\}$, $k = 1, \dots, n$, попарно не пересекаются, и выполняется равенство $A = \{\max_{1\le k\le n} X_k > x\} = \cup_{k=1}^{n} A_k$. Для любого $k = 1, \dots, n$ события A_k и $\{X_n - X_k \ge 0\}$ независимы. Случайная величина $X_n - X_k$ симметрична. Поэтому выполняется неравенство $\mathbb{P}\{X_n - X_k \ge 0\} \ge 1/2$. Нетрудно проверить, что справедливо включение $\cup_{k=1}^{n} A_k \cap \{X_n - X_k \ge 0\} \subseteq \{X_n > x\}$. Отсюда следует, что

$$\mathbb{P}\{X_n > x\} \geq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\{A_k \cap \{X_n - X_k \geq 0\}\} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\{A_k\}\mathbb{P}\{X_n - X_k \geq 0\} \geq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\{A_k\} = \frac{1}{2}\mathbb{P}\{A\}. \quad \blacktriangleleft$$

Неравенства Леви существенным образом дополняет следующее неравенство Хоффмана-Йоргенсена (Jørgen Hoffman-Jørgensen).

4.2.4. Теорема. *Предположим дополнительно, что случайные величины* $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *симметричны. Тогда для любых* $c > 0$ *и* $x > 0$

$$\mathbb{P}\{|X_n| > 2x + c\} \leq \mathbb{P}\{\max_{1\leq k\leq n} |\xi_k| > c\} + (2\mathbb{P}\{|X_n| > x\})^2. \qquad (4.2.5)$$

$\blacktriangleright$ События $A_k = \{\max_{1\leq j<k} |X_j| \leq x, |X_k| > x\}$, $k = 1, \ldots, n$, попарно не пересекаются, и $A = \{\max_{1\leq k\leq n} |X_k| > x\} = \cup_{k=1}^{n} A_k$. Обозначим $X_0 = 0$. Так как $|X_k| = |X_{k-1} + \xi_k| \leq |\xi_k| + |X_{k-1}|$, то $|X_n - X_k| \geq |X_n| - |X_{k-1}| - |\xi_k|$. Отсюда следует, что

$$A_k \cap \{|X_n| > 2x + c\} \subseteq A_k \cap \{|X_n - X_k| > x + c - |\xi_k|\}$$

для всех $k = 1, \ldots, n$. Заметим, что $\{|X_n| > 2x + c\} \subseteq A = \cup_{k=1}^{n} A_k$. Из перечисленных соотношений следует, что

$$\mathbb{P}\{|X_n| > 2x + c\} \leq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\{A_k \cap \{|X_n| > 2x + c\}\} \leq$$
$$\leq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\{A_k \cap \{|X_n - X_k| > x + c - |\xi_k|\}\} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\{A_k \cap \{|X_n - X_k| > x + c - |\xi_k|\} \cap \{\max_{1\leq k\leq n} |\xi_k| > c\}\} +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\{A_k \cap \{|X_n - X_k| > x + c - |\xi_k|\} \cap \{\max_{1\leq k\leq n} |\xi_k| \leq c\}\}.$$

Последние две суммы можно оценить следующим образом

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\{A_k \cap \{|X_n - X_k| > x + c - |\xi_k|\} \cap \{\max_{1\leq k\leq n} |\xi_k| > c\}\} \leq$$
$$\leq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\{A_k \cap \{\max_{1\leq k\leq n} |\xi_k| > c\}\} = \mathbb{P}\{A \cap \{\max_{1\leq k\leq n} |\xi_k| > c\}\}.$$

Для любого $k = 1, \ldots, n$ события A_k и $\{|X_n - X_k| > x\}$ независимы. Это позволяет оценить вторую сумму следующим образом

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\{A_k \cap \{|X_n - X_k| > x + c - |\xi_k|\} \cap \{\max_{1\le k\le n} |\xi_k| \le c\}\} \le$$
$$\le \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\{A_k \cap \{|X_n - X_k| > x\}\} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\{A_k\}\mathbb{P}\{|X_n - X_k| > x\} \le$$
$$\le \max_{1\le k\le n} \mathbb{P}\{|X_n - X_k| > x\} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\{A_k\} = \max_{1\le k\le n} \mathbb{P}\{|X_n - X_k| > x\}\mathbb{P}\{A\}.$$

Из приведенных неравенств следует, что

$$\mathbb{P}\{|X_n| > 2x + c\} \le \mathbb{P}\{\max_{1\le k\le n} |\xi_k| > c\} + \max_{1\le k\le n} \mathbb{P}\{|X_n - X_k| > x\}\mathbb{P}\{A\}.$$

По неравенству (4.2.4) справедливы оценки $\mathbb{P}\{A\} \le 2\mathbb{P}\{|X_n| > x\}$ и

$$\mathbb{P}\{|X_n - X_k| > x\} \le \mathbb{P}\{\max_{1\le k\le n} |\sum_{j=k}^{n} \xi_j| > x\} \le 2\mathbb{P}\{|X_n| > x\}.$$

Из этих оценок и предыдущего неравенства следует (4.2.5). ◄

Завершим этот параграф доказательством следующего неравенства Скорохода (Анатолий Владимирович Скороход).

4.2.5. Теорема. *Если* $\mathbb{P}\{|\xi_j| \le c\} = 1$ *для всех* $j = 1, \ldots, n$ *и* $\mathbb{P}\{|X_n| > \beta\} \le 1/(8e)$ *для некоторых* $c > 0$ *и* $\beta > 0$, *то для любого* $k \in \mathbb{N}$ *существует постоянная* $L_k > 0$ *такая, что*

$$\mathbb{E}|X_n|^k \le L_k(c + \beta)^k. \tag{4.2.6}$$

► Предположим временно, что случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ симметричны и $\mathbb{P}\{|X_n| > \beta\} \le 1/(4e)$. Возьмем любое $m \in \mathbb{N}$. Последовательное применение неравенства (4.2.5) ведет к неравенствам

$$\mathbb{P}\{|X_n| \ge 2^m(\beta + c)\} \le \mathbb{P}\{|X_n| > 2(2^{m-1}(\beta + c) - c) + c\} \le$$
$$\le (4\mathbb{P}\{|X_n| > 2^{m-1}(\beta + c) - c\})^2 \le \cdots \le (4\mathbb{P}\{|X_n| > \beta\})^{2^m} \le e^{-2^m}.$$

Обозначим $\varepsilon = 1/(4(\beta + c)), B_m = \{2^{m-1}(\beta + c) < |X_n| \le 2^m(\beta + c)\}$.

Из оценки $\mathbb{P}\{|X_n| > 2^m(\beta + c)\} \le e^{-2^m}$ вытекают неравенства

$$\mathbb{E}e^{\varepsilon|X_n|} = \mathbb{E}(e^{\varepsilon|X_n|}\mathbb{1}_{\{|X_n|\le\beta+c\}}) + \sum_{m=1}^{\infty}\mathbb{E}(e^{\varepsilon|X_n|}\mathbb{1}_{B_m}) \le$$
$$\le e^{1/4} + \sum_{m=1}^{\infty} e^{2^{m-2}}\mathbb{P}\{|X_n| > 2^{m-1}(\beta + c)\} \le e^{1/4} + \sum_{m=1}^{\infty} e^{-3\cdot 2^{m-2}}.$$

Откажемся от условия, что случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_n$ симметричны. В силу следствия 3.1.4 можно считать, что существуют случайные величины $\xi_1', \dots, \xi_n'$ такие, что случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_n, \xi_1', \dots, \xi_n'$ независимы, и для любого $k = 1, \dots, n$ случайные величины ξ_k и ξ_k' одинаково распределены. Заметим, что разности $\xi_1 - \xi_1', \dots, \xi_n - \xi_n'$ являются независимыми, симметричными случайными величинами. Случайные величины $X_n' = \xi_1' + \dots + \xi_n'$ и $X_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ независимы и одинаково распределены. По условию выполняется неравенство $\mathbb{P}\{|X_n| > \beta\} \le 1/(8e)$. Поэтому $\mathbb{P}\{|(X_n - X_n')/2| > \beta\} \le 2\mathbb{P}\{|X_n| > \beta\} \le 1/(4e)$. По доказанному выше величина $\mathbb{E}e^{\varepsilon|X_n - X_n'|/2}$ не превосходит $L = e^{1/4} + \sum_{m=1}^{\infty} e^{-3\cdot 2^{m-2}}$. Так как случайные величины X_n и X_n' независимы и справедливо неравенство $|(X_n - X_n')/2| \ge |X_n/2| - |X_n'/2|$, то

$$\mathbb{E}e^{\varepsilon|X_n|/2}\mathbb{E}e^{-\varepsilon|X_n'|/2} \le \mathbb{E}e^{\varepsilon|(X_n - X_n')/2|} = L.$$

Второй сомножитель слева можно оценить следующим образом

$$\mathbb{E}e^{-\varepsilon|X_n'|/2} = \mathbb{E}e^{-\varepsilon|X_n|/2} \ge e^{-\varepsilon\beta/2}\mathbb{P}\{|X_n| \le \beta\} \ge e^{-1/8}(1 - \frac{1}{8e}).$$

Тем самым доказано, что величина $\mathbb{E}e^{\varepsilon|X_n|/2}$ не превосходит постоянной $H = Le^{1/8}/(1 - 1/(8e))$. Отсюда следует, что

$$\frac{1}{k!}\mathbb{E}\Big|\frac{X_n}{8(\beta + c)}\Big|^k = \frac{1}{k!}\mathbb{E}\Big|\frac{\varepsilon X_n}{2}\Big|^k \le \mathbb{E}e^{\varepsilon|X_n|/2} \le H.$$

Неравенство (4.2.6) выполняется с постоянной $L_k = 8^k k! H$. ◀

4.3. Свойства траекторий

В этом параграфе будут исследованы некоторые свойства траекторий d-мерных случайных процессов с независимыми приращениями. Предполагается, что все рассматриваемые случайные процессы определены на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Пусть дан вещественный случайный процесс $X = \{X_t, t \in T\}$ со счетным множеством $T \subset \mathbb{R}$. Возьмем любое конечное множество $J = \{t_1, \ldots, t_n\} \subset T, t_1 < \cdots < t_n$, и любые $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Определим функции $\tau_r \colon \Omega \to \{1, \ldots, n\} \cup \{\infty\}$, $r \in \mathbb{N}$, положив

$$\begin{aligned}
&\tau_1 = \min\{k \in \{1, \ldots, n\} \colon X_{t_k} \le a\},\\
&\tau_2 = \min\{k \in \{1, \ldots, n\} \colon k > \tau_1, X_{t_k} \ge b\},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\tau_{2r-1} = \min\{k \in \{1, \ldots, n\} \colon k > \tau_{2r-2}, X_{t_k} \le a\},\\
&\tau_{2r} = \min\{k \in \{1, \ldots, n\} \colon k > \tau_{2r-1}, X_{t_k} \ge b\},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Величина τ_r по определению равна бесконечности, если подмножество чисел множества $\{1, \ldots, n\}$, входящее в ее определение, пусто. Заметим, что все функции $\tau_r, r > n$, равны бесконечности.

4.3.1. Определение. Функция $U(a, b, T, J) \colon \Omega \to \{0, 1, \ldots, n\}$,

$$U(a, b, T, J) = \begin{cases} \max\{r \in \mathbb{N} \colon \tau_{2r} \le n\} & \text{на } \{\tau_2 \le n\},\\ 0 & \text{на } \{\tau_2 > n\}, \end{cases}$$

называется *числом пересечений* сегмента $[a, b]$ случайными величинами $X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}$. Функция $U(a, b, T) \colon \Omega \to \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$,

$$U(a, b, T) = \sup\{U(a, b, T, J) \colon J \subset T\},$$

называется *числом пересечений* сегмента $[a, b]$ случайным процессом X. Точная верхняя грань вычисляется по всем конечным подмножествам J счетного множества T.

4.3.2. Теорема. *Пусть дан произвольный случайный процесс $X = \{X_t, t \in T\}$ со счетным множеством T. Тогда число $U(a, b, T)$ пересечений любого сегмента $[a, b]$ случайным процессом X является измеримой функцией.*

► Напомним, что существует не более счетного числа конечных подмножеств J счетного множества T. По теореме 1.5.5 функция $U(a, b, T)$ измерима, если этим свойством обладает функция $U(a, b, T, J)$ для любого конечного множества $J = \{t_1, \ldots, t_n\} \subset T$. Можно считать, что $t_1 < \cdots < t_n$. Функция $U(a, b, T, J)$ измерима, если этим свойством обладают все функции $\tau_r, r \in \mathbb{N}$. Убедимся, что функции $\tau_r, r \in \mathbb{N}$, измеримы. Функция τ_1 измерима, так как

$\{\tau_1 = k\} = \{X_{t_1} > a, \dots, X_{t_{k-1}} > a, X_{t_k} \le a\} \in \mathcal{F}$. Далее можно рассуждать по индукции. Предположим, что функция τ_r измерима. Заметим, что $\{\tau_{r+1} = k\} = \cup_{m=1}^{k-1}\{\tau_r = m, \tau_{r+1} = k\}$ для каждого $k = 1, \dots, n$. Достаточно доказать, что множества-слагаемые справа принадлежат сигма-алгебре $\mathcal{F}$. Если r – нечетное число, то

$$\{\tau_r = m, \tau_{r+1} = k\} = \{\tau_r = m, X_{t_{m+1}} < b, \dots, X_{t_{k-1}} < b, X_{t_k} \ge b\} \in \mathcal{F}.$$

Если r – четное число, то

$$\{\tau_r = m, \tau_{r+1} = k\} = \{\tau_r = m, X_{t_{m+1}} > a, \dots, X_{t_{k-1}} > a, X_{t_k} \le a\} \in \mathcal{F}.$$

Тем самым доказано, что функция τ_{r+1} измерима. ◀

4.3.3. Теорема. *Пусть дан вещественный случайный процесс $X = \{X_t, t \in T\}$ с независимыми приращениями с конечным множеством $T = \{t_1, \dots, t_n\}, t_1 < \dots < t_n$. Если выполняется неравенство $\mathbb{P}\{|X_{t_n} - X_{t_k}| \ge (b-a)/2\} \le \gamma$ для всех $k = 1, \dots, n$ и для некоторых $a, b \in \mathbb{R}, a < b, 0 \le \gamma < 1/2$, то*

$$\mathbb{E}U(a, b, T) \le \frac{\gamma}{1 - 2\gamma}. \tag{4.3.1}$$

▶ Обозначим $\varepsilon = (b-a)/2, U = U(a, b, T), U_k = U(a, b, T_k)$ число пересечений сегмента $[a, b]$ случайным процессом $\{X_t, t \in T_k\}$, где $T_k = \{t_k, \dots, t_n\} \subset T$, $A = \{\max_{1 \le k \le n} |X_{t_k} - X_{t_1}| \ge \varepsilon\}$ и $A_k = \{\max_{1 \le j < k} |X_{t_j} - X_{t_1}| < \varepsilon, |X_{t_k} - X_{t_1}| \ge \varepsilon\}$ для $k = 1, \dots, n$. Заметим, что события $A_k, k = 1, \dots, n$, попарно не пересекаются и выполняется равенство $A = \cup_{k=1}^n A_k$. Докажем, что

$$\{U \ge m\} \subseteq \cup_{k=1}^n \big(A_k \cap \{U_k \ge m - 1\}\big), m \in \mathbb{N}. \tag{4.3.2}$$

Это неравенство достаточно доказать для $1 \le m \le n$, так как случайная величина U принимает значения в множестве $\{0, \dots, n\}$. Возьмем любое $\omega \in \{U \ge m\}$. Тогда найдется $s = s(\omega) \in \mathbb{N}$, $s \ge m$, такое, что $\omega \in \{X_{\tau_{2j-1}} \le a, X_{\tau_{2j}} \ge b, j = 1, \dots, s\}$ и, следовательно, $\omega \in \{X_{t_{\tau_2}} - X_{t_{\tau_1}} \ge 2\varepsilon, \cdots, X_{t_{\tau_{2s}}} - X_{t_{\tau_{2s-1}}} \ge 2\varepsilon\}$. Рассмотрим числа $r = \tau_1(\omega)$, $k = \tau_2(\omega), k_1 = \tau_3(\omega), \dots, k_{2(s-1)} = \tau_{2s}(\omega)$. Из определения $\tau_1, \dots, \tau_{2s}$ следует, что $1 \le r < k < k_1 < \dots < k_{2(s-1)} \le n$. Элементарное событие ω принадлежит событиям $\{X_{t_k} - X_{t_r} \ge 2\varepsilon\}$ и $\{X_{t_{k_1}} - X_{t_k} \ge 2\varepsilon, \dots, X_{t_{2(s-1)}} - X_{t_{2(s-1)-1}} \ge 2\varepsilon\}$. Так как последнее событие лежит в событии $\{U_k \ge m-1\}$, то $\omega \in \{U_k \ge m-1\}$.

Далее, так как $2\varepsilon \le X_{t_k} - X_{t_r} \le |X_{t_k} - X_{t_1}| + |X_{t_r} - X_{t_1}|$, то $\omega \in \{\max_{1\le j\le k} |X_{t_j} - X_{t_1}| \ge \varepsilon\} = \cup_{j=1}^k A_j$. Поэтому $\omega \in A_j$ для некоторого $j, 1 \le j \le k$. Так как $U_k \le U_j$, то $\omega \in A_j \cap \{U_j \ge m-1\}$ и, следовательно, ω принадлежит объединению справа в (4.3.2).

Докажем, что для каждого $k = 1, \dots, n$ события $\{U_k \ge m-1\}$ и A_k независимы. Так как $U_n = 0$, то утверждение требуется доказать для $k, 1 \le k < n$. Событие A_k определяется случайными величинами $X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_k} - X_{t_1}$. Каждая из этих случайных величин является суммой некоторого числа независимых случайных величин $X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \dots, X_{t_k} - X_{t_{k-1}}$. Рассуждая как в доказательстве (4.3.2), можно убедиться, что

$$\{U_k \ge m-1\} = \cup\{X_{t_{k_2}} - X_{t_{k_1}} \ge 2\varepsilon, \cdots, X_{t_{k_{2s}}} - X_{t_{k_{2s-1}}} \ge 2\varepsilon\},$$

где объединение распространяется на все наборы целых чисел s, $k_1, \dots, k_{2s}$, $m-1 \le s \le n$, $k \le k_1 < \dots < k_{2s} \le n$. События A_k и $\{U_k \ge m-1\}$ независимы, так как они определяются независимыми случайными величинами $X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_k} - X_{t_1}$ и соответственно случайными величинами $X_{t_{k+1}} - X_{t_k}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$.

Из (4.3.2) и соотношений $A = \cup_{k=1}^n A_k$ и $U_k \le U$ следует, что

$$\mathbb{P}\{U \ge m\} \le \sum_{k=1}^n \mathbb{P}\{A_k \cap \{U_k \ge m-1\}\} = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}\{A_k\}\mathbb{P}\{U_k \ge m-1\} \le$$
$$\le \sum_{k=1}^n \mathbb{P}\{A_k\}\mathbb{P}\{U \ge m-1\} = \mathbb{P}\{A\}\mathbb{P}\{U \ge m-1\}.$$

С помощью неравенства (4.2.1) для $\xi_k = X_{t_k} - X_{t_{k-1}}, k = 2, \dots, n$, $x = c = \varepsilon/2$ можно убедиться, что

$$\mathbb{P}\{A\} \le \frac{1}{1-\gamma}\mathbb{P}\{|X_{t_n} - X_{t_1}| \ge \varepsilon/2\} \le \frac{\gamma}{1-\gamma},$$
$$\mathbb{P}\{U \ge m\} \le \mathbb{P}\{A\}\mathbb{P}\{U \ge m-1\} \le \frac{\gamma}{1-\gamma}\mathbb{P}\{U \ge m-1\}.$$

Неравенство (4.3.1) является следствием следующих вычислений

$$\mathbb{E}U = \sum_{m=1}^\infty m\mathbb{P}\{U = m\} = \sum_{m=1}^\infty m(\mathbb{P}\{U \ge m\} - \mathbb{P}\{U \ge m+1\}) =$$
$$= \sum_{m=1}^\infty \mathbb{P}\{U \ge m\} \le \sum_{m=1}^\infty \left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)^m = \frac{\gamma}{1-2\gamma}. \quad ◄$$

4.3.4. Теорема. *Пусть дан стохастически непрерывный случайный процесс $X = \{X_t, t \in T\}$ с независимыми приращениями с выпуклым множеством T. Тогда для любого всюду плотного счетного множества $S \subset T$ существует событие Ω_S единичной вероятности такое, что для любого $\omega \in \Omega_S$ существуют пределы*

$$\begin{aligned} &\lim_{S\ni s\uparrow t} X_s(\omega) \in \mathbb{R}^d \text{ для любого } t \in T, t > t_*, \\ &\lim_{S\ni s\downarrow t} X_s(\omega) \in \mathbb{R}^d \text{ для любого } t \in T, t < t^*. \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

► Теорему достаточно доказать для вещественного случайного процесса. Предположим сначала, что $T = [a, b]$. Ниже будет доказано, что существуют события Ω' и Ω'' единичной вероятности со следующими свойствами. Для любого $\omega \in \Omega'$ функция $X_t(\omega), t \in [a, b] \cap S$ ограничена. Для любого $\omega \in \Omega''$ число пересечений $U(\alpha, \beta, S)(\omega)$ любого сегмента $[\alpha, \beta] \subseteq [a, b], \alpha, \beta \in \mathbb{Q}$, случайным процессом $\{X_t, t \in S\}$ конечно. Докажем, что для любого $\omega \in \Omega_S = \Omega' \cap \Omega''$ существуют конечные пределы (4.3.3). Предположим противное, например, что для некоторых $\omega \in \Omega_S$ и $t \in T, t > t_*$, не существует первый предел. Тогда найдется строго возрастающая последовательность $\{t_n\}_{n\geq 1}$ чисел $t_n = t_n(\omega) \in (t_*, t)$, сходящаяся к t, такая, что $\lim_{n\to\infty} X_{t_{2n+1}}(\omega) = c' < c'' = \lim_{n\to\infty} X_{t_{2n}}(\omega)$. Найдутся рациональные числа α и β такие, что $c' < \alpha < \beta < c''$. Траектория $X_t(\omega), t \in S$, имеет бесконечное число пересечений сегмента $[\alpha, \beta]$. Это вступает в противоречие с построением множества Ω_S.

Докажем существование события Ω' с указанными свойствами. Множество S можно представить в виде объединения $S = \cup_{n=1}^{\infty} S_n$ расширяющихся конечных множеств $S_n \subset S_{n+1}$. Занумеруем числа из множества S_n в порядке возрастания $t_1 < \cdots < t_{m_n}$. Обозначим $\xi_1 = X_{t_1}, \xi_k = X_{t_k} - X_{t_{k-1}}, k = 2, \ldots, m_n$. По теореме 4.2.2 для любого $\lambda > 0$ выполняется неравенство

$$\mathbb{P}\{\max_{1\leq k\leq m_n} |X_{t_k}| > 3\lambda\} \leq 3 \max_{1\leq k\leq m_n} \mathbb{P}\{|X_{t_k}| > \lambda\}.$$

Отсюда следует, что

$$\mathbb{P}\{\sup_{t\in[a,b]\cap S} |X_t| > 3\lambda\} \leq 3 \sup_{t\in[a,b]} \mathbb{P}\{|X_t| > \lambda\}. \tag{4.3.4}$$

Докажем, что $\lim_{\lambda\to\infty} \sup_{t\in[a,b]} \mathbb{P}\{|X_t| > \lambda\} = 0$. Предположим противное, что $\limsup_{\lambda\to\infty} \sup_{t\in[a,b]} \mathbb{P}\{|X_t| > \lambda\} = \alpha > 0$. Поэтому найдутся числа $t_n \in [a,b]$ и $\lambda_n > 0$ такие, что $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$ и $\mathbb{P}\{|X_{t_n}| > \lambda_n\} > \alpha/2$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Обозначим $\varepsilon = \inf_{n\geq 1} \lambda_n$. Ограниченная последовательность $\{t_n\}_{n\geq 1}$ содержит сходящуюся подпоследовательность. Можно считать, что сама последовательность $\{t_n\}_{n\geq 1}$ сходится к некоторому числу $t \in [a,b]$. Предельный переход при $n \to \infty$ в неравенствах

$$\alpha/2 \leq \mathbb{P}\{|X_{t_n}| > \lambda_n\} \leq \mathbb{P}\{|X_t| > \lambda_n/2\} + \mathbb{P}\{|X_{t_n} - X_t| > \varepsilon/2\}$$

приводит к невозможному неравенству $\alpha \leq 0$, так как оба слагаемых справа стремятся к нулю. Тем самым доказано, что величина справа в (4.3.4) стремится к нулю при $\lambda \to \infty$. Поэтому найдутся положительные числа $\lambda_r, r \in \mathbb{N}$, такие , что $\lambda_r \uparrow \infty$ при $r \to \infty$ и $\mathbb{P}\{\sup_{t\in[a,b]\cap S} |X_t| > 3\lambda_r\} \leq 2^{-r}$ для любого $r \in \mathbb{N}$. Отсюда следует, что события $A_r = \{\sup_{t\in[a,b]\cap S} |X_t| > 3\lambda_r\}, r \in \mathbb{N}$, удовлетворяют условию $\sum_{r=1}^{\infty} \mathbb{P}\{A_r\} \leq \sum_{r=1}^{\infty} 2^{-r} = 1$. По теореме 1.5.16 (с вероятностью $\mathbb{P}$ вместо меры μ; см. также теорему 1.4.13) событие $\Omega' = \cup_{m=1}^{\infty} \cap_{r=m}^{\infty} \{\sup_{t\in[a,b]\cap S} |X_t| \leq 3\lambda_n\}$ имеет единичную вероятность. Для любого $\omega \in \Omega'$ функция $X_t(\omega), t \in [a,b] \cap S$, ограничена.

Докажем существование события Ω'' с указанными свойствами. По теореме 3.1.14 случайный процесс $\{X_t,\ t \in [a,b]\}$ равномерно стохастически непрерывен. Отсюда следует, что для любых чисел $\alpha, \beta \in [a,b], \alpha < \beta, \gamma \in (0,1/2)$ найдется $h > 0$ такое, что

$$\sup_{a\leq s,t\leq b, |s-t|\leq h} \mathbb{P}\{|X_s - X_t| \geq (\beta - \alpha)/2\} < \gamma.$$

Разобьем сегмент $[a,b]$ на сегменты $[a_k, b_k]$, $k = 1,\ldots,r$, длины не более h. Обозначим $U_k(\alpha,\beta,S_n)$ и $U_k(\alpha,\beta,S)$ числа пересечений сегмента $[\alpha,\beta]$ случайными процессами $\{X_t, t \in [a_k,b_k] \cap S_n\}$ и $\{X_t, t \in [a_k,b_k] \cap S\}$. По теореме 4.3.3 выполняется неравенство $\mathbb{E}U_k(\alpha,\beta,S_n) \leq \gamma/(1-2\gamma)$. Устремляя $n \to \infty$, мы придем к оценке $\mathbb{E}U_k(\alpha,\beta,S) \leq \gamma/(1-2\gamma)$. Поэтому величина $U_k(\alpha,\beta,S)$ конечна п.в., и, следовательно, событие $\{U_k(\alpha,\beta,S) < \infty\}$ имеет единичную вероятность. Заметим, что число пересечений $U(\alpha,\beta,S)$ сегмента $[\alpha,\beta]$ случайным процессом $\{X_t, t \in [a,b] \cap S\}$ не превосходит суммы $\sum_{k=1}^{r} U_k(\alpha,\beta,S) + r$. Поэтому каждое из событий $\{U(\alpha,\beta,S) < \infty\}$ и $\Omega'' = \cap_{\alpha,\beta\in\mathbb{Q},\alpha<\beta}\{U(\alpha,\beta,S) < \infty\}$ имеет единичную вероятность. Для любого $\omega \in \Omega''$ функция $X_t(\omega), t \in [a,b] \cap S$, имеет конечное число пересечений любого сегмента $[\alpha,\beta], \alpha,\beta \in \mathbb{Q}, \alpha < \beta$.

Докажем теорему в общем случае. Любое выпуклое множество T, отличное от сегмента, можно представить в виде объединения $T = \cup_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$ расширяющихся сегментов $[a_n, b_n] \subset [a_{n+1}, b_{n+1}]$. Пусть S – произвольное счетное всюду плотное подмножество множества T. По доказанному выше для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует событие Ω_n единичной вероятности такое, что для любого $\omega \in \Omega_n$ существуют конечные пределы $\lim_{S\ni s\uparrow t} X_s$ для любого $t \in (a_n, b_n]$ и $\lim_{S\ni s\downarrow t} X_s$ для любого $t \in [a_n, b_n)$. Поэтому пределы (4.3.3) существуют на событии $\Omega_S = \cap_{n=1}^{\infty}\Omega_n$ единичной вероятности. ◀

4.3.5. Теорема. *Любой $\mathbb{R}^d$-значный стохастически непрерывный случайный процесс $X = \{X_t, t \in T\}$ с независимыми приращениями с выпуклым множеством T имеет две модификации. Одна из них регулярна справа, а другая регулярна слева.*

▶ Докажем, например, что он имеет регулярную слева модификацию. Возьмем произвольное всюду плотное счетное множество $S \subset T$. По теореме 4.3.4 существует событие Ω_S единичной вероятности такое, что для любого $\omega \in \Omega_S$ существуют пределы (4.3.3). Определим случайный процесс $Y = \{Y_t, t \in T\}$,

$$Y_t(\omega) = \begin{cases} X_{t_*}(\omega), & \text{для всех } \omega \in \Omega, \text{ если } t_* \in T, \\ \lim_{S\ni s\uparrow t} X_s(\omega), & \text{если } \omega \in \Omega_S, t \in T, t > t_*, \\ x, & \text{для всех } t \in T, \text{ если } \omega \in \Omega \setminus \Omega_S, \end{cases}$$

где x – произвольная точка из $\mathbb{R}^d$.

Случайные процессы X и Y эквивалентны. Действительно, так как случайный процесс X стохастически непрерывный, то

$$\mathbb{P}\{\|X_t - Y_t\| > \varepsilon\} = \lim_{S\ni s\uparrow t} \mathbb{P}\{\|X_t - X_s\| > \varepsilon\} = 0$$

для любых $t \in T, t > t_*$, и $\varepsilon > 0$. При $\varepsilon = 1/n, n \in \mathbb{N}$, отсюда следует, что $\mathbb{P}\{X_t \neq Y_t\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{\|X_t - Y_t\| > 1/n\} = 0$. Если $t_* \in T$, то выполняется равенство $X_{t_*} = Y_{t_*}$ по определению Y.

Случайный процесс Y имеет независимые приращения, так как он эквивалентен случайному процессу X. По теореме 3.4.5 случайный процесс Y регулярен слева. ◀

4.4. Критерий непрерывности

Имеется удобный критерий для проверки непрерывности траекторий случайных процессов с независимыми приращениями. Ниже приведено его доказательство. Предполагается, что случайные процессы, о которых пойдет речь, определены на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и принимают значения в $\mathbb{R}^d$.

4.4.1. Теорема. *Стохастически непрерывный случайный процесс* $X = \{X_t, t \in T\}$ *с независимыми приращениями с выпуклым множеством* T *имеет непрерывную версию, если*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\{\|X_{t_{n,k}} - X_{t_{n,k-1}}\| > \varepsilon\} = 0 \tag{4.4.1}$$

для любого числа $\varepsilon > 0$, *любого конечного сегмента* $[a, b] \subseteq T$ *и любых разбиений* $a = t_{n,0} < \cdots < t_{n,n} = b$ *сегмента* $[a, b]$ *со свойством* $\lim_{n\to\infty} \max_{1\le k\le n}(t_{n,k} - t_{n,k-1}) = 0$.

► Предположим сначала, что $T = [a, b]$. Любая версия случайного процесса X удовлетворяет условию (4.4.1). По теореме 4.3.5 случайный процесс X имеет регулярную справа версию. Можно считать, что сам случайный процесс X является регулярным справа. Для любого положительного числа ε и для произвольного разбиения $a = t_{n,0} < \cdots < t_{n,n} = b$ сегмента $[a, b]$ события $A_k, k = 1, \dots, n$,

$$A_k = \{\max_{1\le j<k} \|X_{t_{n,j}} - X_{t_{n,j-1}}\| \le \varepsilon, \|X_{t_{n,k}} - X_{t_{n,k-1}}\| > \varepsilon\},$$

попарно не пересекаются, и их объединение совпадает с событием $B_n = \{\max_{1\le k\le n} \|X_{t_{n,k}} - X_{t_{n,k-1}}\| > \varepsilon\}$. Отсюда и из условия (4.4.1) следует, что

$$\mathbb{P}\{B_n\} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\{A_k\} \le \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\{\|X_{t_{n,k}} - X_{t_{n,k-1}}\| > \varepsilon\} \to 0$$

при $n \to \infty$. Поэтому для любого $r \in \mathbb{N}$ найдется $n_r \in \mathbb{N}$ такое, что $\mathbb{P}\{B_{n_r}\} < 2^{-r}$. Ряд $\mathbb{P}\{B_{n_1}\} + \mathbb{P}\{B_{n_2}\} + \cdots$ сходится. По теореме 1.5.16 с $\mu = \mathbb{P}$ событие $\Omega_\varepsilon = \cup_{m=1}^{\infty} \cap_{r=m}^{\infty} B_{n_r}^c$ имеет единичную вероятность. Событие $\Omega' = \cap_{m=1}^{\infty} \Omega_{1/m}$ также имеет единичную вероятность. Убедимся, что для любого $\omega \in \Omega'$ функция $X_t(\omega), t \in [a, b]$, непрерывна. Предположим противное, что для некоторых $\omega \in \Omega'$, $t \in (a, b]$ и $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство $\|X_t(\omega) - X_{t-}(\omega)\| > \varepsilon$. Найдутся числа $m \in \mathbb{N}$ и $t_{n_r,k_r}, r \in \mathbb{N}$, такие, что $2/m < \varepsilon$, $t_{n_r,k_r} \le t \le t_{n_r,k_r+1}$ для всех $r \in \mathbb{N}$. Так как $\lim_{r\to\infty} X_{t_{n,r,k_r}}(\omega) = X_{t-}(\omega)$ и $\lim_{r\to\infty} X_{t_{n,r,k_r+1}}(\omega) = X_t(\omega)$, то для всех достаточно больших $r \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $\|X_{t_{n_r,k_r+1}}(\omega) - X_{t_{n_r,k_r}}(\omega)\| \leq 1/m$ и, следовательно, выполняются невозможные неравенства $\varepsilon < \|X_t(\omega) - X_{t-}(\omega)\| < \varepsilon/2$. Тем самым доказано, что для любого $\omega \in \Omega'$ траектория $X_t(\omega), t \in [a,b]$, непрерывна. Определим случайный процесс $Y = \{Y_t, t \in [a,b]\}$, положив

$$Y_t(\omega) = \begin{cases} X_t(\omega), & \text{если } \omega \in \Omega', \\ x, & \text{если } \omega \notin \Omega', \end{cases} \tag{4.4.2}$$

где x — произвольная фиксированная точка из $\mathbb{R}^d$. Случайный процесс Y непрерывен и эквивалентен случайному процессу X.

Докажем теорему в общем виде. Выпуклое множество T, отличное от конечного сегмента, можно представить в виде объединения $T = \cup_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$ расширяющихся конечных сегментов. По доказанному выше для любого $n \in \mathbb{N}$ существуют непрерывный случайный процесс $\{Y_t^{(n)}, t \in [a_n, b_n]\}$ и множество $\Omega_n \in \mathcal{F}$ единичной вероятности такие, что $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ для всех $t \in [a_n, b_n]$ и $\omega \in \Omega_n$. Пересечение $\Omega'' = \cap_{n=1}^{\infty}\Omega_n$ является событием единичной вероятности. Определим случайный процесс $Y = \{Y_t, t \in T\}$, как указано в (4.4.2) с Ω'' вместо Ω'. Случайный процесс Y непрерывен и эквивалентен данному случайному процессу X. ◀

4.4.2. Теорема. *Если случайный процесс $X = \{X_t, t \in T\}$ с выпуклым множеством T имеет независимые приращения и почти всюду непрерывен, то он удовлетворяет условию* (4.4.1).

▶ По теореме 3.3.2 для любых $a, b \in T, a < b$, и $\varepsilon > 0$ случайный процесс X удовлетворяет условию

$$\lim_{h \downarrow 0} \mathbb{P}\{\sup_{a \leq s,t \leq b, |s-t|<h} \|X_s - X_t\| > \varepsilon\} = 0. \tag{4.4.3}$$

Разобьем сегмент $[a,b]$ точками $a = t_{n,0} < \cdots < t_{n,n} = b$ таким образом, чтобы $\lim_{n\to\infty} \max_{1\leq k\leq n}(t_{n,k} - t_{n,k-1}) = 0$. Определим события $A_k = \{\max_{1\leq j<k} \|X_{t_{n,j}} - X_{t_{n,j-1}}\| \leq \varepsilon, \|X_{t_{n,k}} - X_{t_{n,k-1}}\| > \varepsilon\}$, $k = 1, \ldots, n$. Эти события попарно несовместны, и их объединение совпадает с событием $\{\max_{1\leq k\leq n} \|X_{t_{n,k}} - X_{t_{n,k-1}}\| > \varepsilon\}$. Заметим, что для любого $k = 1, \ldots, n$ события $\{\max_{1\leq j<k} \|X_{t_{n,j}} - X_{t_{n,j-1}}\| \leq \varepsilon\}$ и

$\{\|X_{t_{n,k}} - X_{t_{n,k-1}}\| > \varepsilon\}$ независимы. Отсюда следует, что

$$\mathbb{P}\{\max_{1\le k\le n} \|X_{t_{n,k}} - X_{t_{n,k-1}}\| > \varepsilon\} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\{A_k\} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\{\max_{1\le j<k} \|X_{t_{n,j}} - X_{t_{n,j-1}}\| \le \varepsilon\}\mathbb{P}\{\|X_{t_{n,k}} - X_{t_{n,k-1}}\| > \varepsilon\} \ge$$
$$\ge \mathbb{P}\{\max_{1\le j<n} \|X_{t_{n,j}} - X_{t_{n,j-1}}\| \le \varepsilon\} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\{\|X_{t_{n,k}} - X_{t_{n,k-1}}\| > \varepsilon\}.$$

Из этих соотношений вытекает (4.4.1), так как, в силу (4.4.3),

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{\max_{1\le k\le n} \|X_{t_{n,k}} - X_{t_{n,k-1}}\| > \varepsilon\} = 0. \quad ◀$$

4.4.3. Теорема. *Если случайный процесс $X = \{X_t, t \in T\}$ с независимыми приращениями с выпуклым множеством T почти всюду непрерывен, то для любых $t_1, t_2 \in T, t_1 < t_2$, случайный вектор $X_{t_2} - X_{t_1}$ имеет нормальное распределение.*

▶ Можно считать, что случайный процесс X принимает вещественные значения, так как в соответствии с замечанием 2.4.5 случайный вектор $X_{t_2} - X_{t_1} = (X_{1,t_2} - X_{1,t_1}, \dots, X_{d,t_2} - X_{d,t_1})$ имеет d-мерное нормальное распределение, если и только если для любого вектора $u = (u_1, \dots, u_d) \in \mathbb{R}^d$ вещественная случайная величина $\langle X_{t_2} - X_{t_1}, u\rangle = \sum_{k=1}^{d} (X_{k,t_2} - X_{k,t_1})u_k$ имеет одномерное нормальное распределение. Разобьем сегмент $[t_1, t_2]$ точками $t_{n,k} = t_1 + k2^{-n}(t_2 - t_1)$, $k = 0, \dots, 2^n$. Определим случайные величины $\xi_{n,k} = (X_{t_{n,k}} - X_{t_{n,k-1}})\mathbb{1}_{\{|X_{t_{n,k}} - X_{t_{n,k-1}}| \le 1\}}$, $S_n = \xi_{n,1} + \dots + \xi_{n,2^n}$. Заметим, что $X_{t_2} - X_{t_1} = \sum_{k=1}^{2^n} (X_{t_{n,k}} - X_{t_{n,k-1}})$. Для любого $x \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$\mathbb{P}\{X_{t_2} - X_{t_1} < x\} = \mathbb{P}\{S_n < x, \max_{1\le k\le 2^n} |X_{t_{n,k}} - X_{t_{n,k-1}}| \le 1\} +$$
$$+ \mathbb{P}\{X_{t_2} - X_{t_1} < x, \max_{1\le k\le 2^n} |X_{t_{n,k}} - X_{t_{n,k-1}}| > 1\}.$$

По теореме 4.4.2 выполняется условие (4.4.1) с $\varepsilon = 1$, из которого следует, что

$$\mathbb{P}\{\max_{1\le k\le 2^n} |X_{t_{n,k}} - X_{t_{n,k-1}}| > 1\} \le \sum_{k=1}^{2^n} \mathbb{P}\{|X_{t_{n,k}} - X_{t_{n,k-1}}| > 1\} \to 0$$

при $n \to \infty$. Отсюда и из равенства

$$\mathbb{P}\{S_n < x\} = \mathbb{P}\{S_n < x, \max_{1\le k\le 2^n} |X_{t_{n,k}} - X_{t_{n,k-1}}| \le 1\}+$$
$$+ \mathbb{P}\{S_n < x, \max_{1\le k\le 2^n} |X_{t_{n,k}} - X_{t_{n,k-1}}| > 1\}$$

следует, что

$$\mathbb{P}\{X_{t_2} - X_{t_1} < x\} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{S_n < x\}, x \in \mathbb{R}. \qquad (4.4.4)$$

Для любого $\varepsilon > 0$ выполняются соотношения

$$\max_{1\le k\le 2^n} \mathbb{E}|\xi_{n,k}| = \max_{1\le k\le 2^n} \mathbb{E}(|\xi_{n,k}|(\mathbb{1}_{\{|\xi_{n,k}|\le\varepsilon/4\}} + \mathbb{1}_{\{|\xi_{n,k}|>\varepsilon/4\}})) \le$$
$$\le \frac{\varepsilon}{4} + \sum_{k=1}^{2^n} \mathbb{P}\{|X_{t_{n,k}} - X_{t_{n,k-1}}| > \varepsilon/4\}.$$

В силу (4.4.1) выполняется неравенство $\max_{1\le k\le 2^n} |\mathbb{E}\xi_{n,k}| < \varepsilon/2$ для всех $n \in \mathbb{N}$, начиная с некоторого n_0. Для $n > n_0$ справедливо неравенство $\mathbb{E}(|\xi_{n,k}-\mathbb{E}\xi_{n,k}|^2\mathbb{1}_{\{|\xi_{n,k}-\mathbb{E}\xi_{n,k}|>\varepsilon\}}) \le 4\mathbb{P}\{|X_{t_{n,k}}-X_{t_{n,k-1}}| > \varepsilon/2\}$, и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2^n} \mathbb{E}(|\xi_{n,k} - \mathbb{E}\xi_{n,k}|^2\mathbb{1}_{\{|\xi_{n,k}-\mathbb{E}\xi_{n,k}|>\varepsilon\}}) = 0. \qquad (4.4.5)$$

Из (4.4.4) следует, что $\lim_{x\to\infty} \sup_{n\ge1} \mathbb{P}\{|S_n| > x\} = 0$. Поэтому найдется $\beta > 0$ такое, что $\sup_{n\ge1} \mathbb{P}\{|S_n| > \beta\} \le 1/(8e)$. По теореме 4.2.5 существует $L > 0$ такое, что $\mathbb{E}|S_n| \le L(\beta + 1)$ и $\mathbb{E}|S_n|^2 \le L(\beta + 1)^2$. Поэтому последовательности $\{\mathbb{E}S_n\}_{n\ge1}$ и $\{\mathbb{E}|S_n - \mathbb{E}S_n|^2\}_{n\ge1}$ содержат сходящиеся подпоследовательности. Можно считать, что сами последовательности сходятся, скажем, к μ и σ^2. Если $\sigma = 0$, то по неравенству Чебышева $\varepsilon^2\mathbb{P}\{|S_n - \mathbb{E}S_n| > \varepsilon\} \le \mathbb{E}|S_n - \mathbb{E}S_n|^2 \to 0$ для любого $\varepsilon > 0$ при $n \to \infty$. Отсюда и из (4.4.4) следует, что $X_{t_2} - X_{t_1} = \mu$ почти всюду. Другими словами, приращение $X_{t_2} - X_{t_1}$ имеет вырожденное нормальное распределение. Далее предполагается, что $\sigma > 0$. Обозначим $\sigma_n^2 = \mathbb{E}|S_n - \mathbb{E}S_n|^2$. Из (4.4.5) следует условие Линдеберга (Jarl Waldemar Lindeberg)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{k=1}^{2^n} \mathbb{E}(|\xi_{n,k} - \mathbb{E}\xi_{n,k}|^2\mathbb{1}_{\{|\xi_{n,k}-\mathbb{E}\xi_{n,k}|>\sigma_n\varepsilon\}}) = 0. \qquad (4.4.6)$$

В курсах по теории вероятностей доказывается, что условие (4.4.6) достаточно для справедливости центральной предельной теоремы

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{S_n - \mathbb{E}S_n < x\sigma_n\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\, du, x \in \mathbb{R}.$$

Отсюда и из (4.4.4) следует, что случайная величина $X_{t_2} - X_{t_1}$ имеет нормальное распределение с параметрами $\mathbb{E}(X_{t_2} - X_{t_1}) = \mu$ и $\mathbb{E}|(X_{t_2} - X_{t_1}) - \mathbb{E}(X_{t_2} - X_{t_1})|^2 = \sigma^2$. ◄

4.5. Однородные процессы

Среди случайных процессов с независимыми приращениями выделяют однородные случайные процессы. Некоторые свойства таких случайных процессов будут исследованы в данном параграфе. Предполагается, что случайные процессы, о которых пойдет речь, определены на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и принимают значения в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$. Для доказательства основного результата этого параграфа нам понадобится закон нуля и единицы Колмогорова (Андрей Николаевич Колмогоров).

4.5.1. Теорема. *Если события $A_n \in \mathcal{F}, n \in \mathbb{N}$, независимы, то $\mathbb{P}\{A\} = 0$ или $\mathbb{P}\{A\} = 1$ для любого $A \in \cap_{n=1}^{\infty} \sigma(A_k, k \geq n)$.*

► Пусть C_n обозначает любое из множеств $A_n, A_n^c, \Omega, \varnothing$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ класс $\mathcal{E}_1$ множеств вида $\cap_{k=1}^{n} C_k$ является π-классом. Аналогично для любых $n, m \in \mathbb{N}$ класс $\mathcal{E}_2$ множеств вида $\cap_{k=n+1}^{n+m} C_k$ является π-классом. Из определения классов $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ следуют равенства $\sigma(\mathcal{E}_1) = \sigma(A_1, \ldots, A_n)$ и $\sigma(\mathcal{E}_2) = \sigma(A_{n+1}, \ldots, A_{n+m})$. Из равенств

$$\mathbb{P}\{\cap_{k=1}^{n+m} C_k\} = \prod_{k=1}^{n+m} \mathbb{P}\{C_k\} = \mathbb{P}\{\cap_{k=1}^{n} C_k\}\mathbb{P}\{\cap_{k=n+1}^{n+m} C_k\}$$

следует, что для любых представителей $A \in \mathcal{E}_1$ и $B \in \mathcal{E}_2$ выполняется равенство $\mathbb{P}\{A \cap B\} = \mathbb{P}\{A\}\mathbb{P}\{B\}$. По теореме 2.1.5 сигма-алгебры $\sigma(A_1, \ldots, A_n)$ и $\sigma(A_{n+1}, \ldots, A_{n+m})$ независимы. Объединение $\mathcal{A}_n = \cup_{m=1}^{\infty} \sigma(A_{n+1}, \ldots, A_{n+m})$, как нетрудно видеть, является алгеброй. Эта алгебра порождает сигма-алгебру $\sigma(A_k, k \geq n+1)$. Для любых представителей $A \in \sigma(A_1, \ldots, A_n)$ и $B \in \mathcal{A}_n$ выполняется равенство $\mathbb{P}\{A \cap B\} = \mathbb{P}\{A\}\mathbb{P}\{B\}$. По теореме 2.1.5 сигма-алгебры $\sigma(A_1, \ldots, A_n)$ и $\sigma(A_k, k \geq n+1)$ независимы.

Пусть $A \in \cap_{n=1}^{\infty} \sigma(A_k, k \geq 1)$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ событие A принадлежит сигма-алгебре $\sigma(A_k, k \geq n+1)$ и, следовательно, не зависит от сигма-алгебры $\sigma(A_1, \ldots, A_n)$. Поэтому A не зависит от любого $B \in \mathcal{A} = \cup_{n=1}^{\infty} \sigma(A_1, \ldots, A_n)$. Класс $\mathcal{A}$ является алгеброй, и выполняется равенство $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(A_n, n \geq 1)$. По теореме 2.1.5 сигма-алгебры $\sigma(\mathcal{A})$ и $\sigma(A_n, n \geq 1)$ независимы. Получается, что событие $A \in \sigma(A_n, n \geq 1)$ не зависит от самого себя. Из равенства $\mathbb{P}\{A \cap A\} = \mathbb{P}\{A\}\mathbb{P}\{A\}$ следует, что $\mathbb{P}\{A\} = 0$ или $\mathbb{P}\{A\} = 1$. ◄

4.5.2. Определение. Случайный процесс $X = \{X_t, t \in T\}$ с выпуклым множеством T называется *однородным,* если случайные векторы $X_{t+h} - X_{s+h}$ и $X_t - X_s$ одинаково распределены для любых чисел $s, t \in T, s < t, h > 0$, таких, что $s + h, t + h \in T$.

Заметим, что каждая из d координат однородного случайного процесса X является однородным вещественным случайным процессом. Действительно, для любых $s, t \in T, s < t, h > 0$, таких, что $s + h, t + h \in T$ и для любых $u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^d$ выполняются равенства

$$\mathbb{E}e^{iu(\langle v, X_{t+h}\rangle - \langle v, X_{s+h}\rangle)} = \mathbb{E}e^{i(\langle uv, X_{t+h}\rangle - \langle uv, X_{s+h}\rangle)} = \\ = \mathbb{E}e^{i(\langle uv, X_t\rangle - \langle uv, X_s\rangle)} = \mathbb{E}e^{iu(\langle v, X_t\rangle - \langle v, X_s\rangle)}.$$

Равенство функций аргумента $u \in \mathbb{R}$ слева и справа означает, что вещественный случайный процесс $\{\langle v, X_t\rangle, t \in T\}$ обладает свойством однородности.

Случайный процесс $X = \{X_t, t \geq 0\}$ называется *вырожденным,* если почти все его траектории являются постоянными. Заметим, что для различных $\omega, \omega' \in \Omega$ траектории $X_t(\omega), t \geq 0$, и $X_t(\omega'), t \geq 0$, могут отличаться. Случайный процесс X называется *невырожденным,* если он не является вырожденным.

4.5.3. Теорема. *Любой невырожденный, однородный случайный процесс $X = \{X_t, t \geq 0\}$ с независимыми приращениями неограничен, другими словами, $\sup_{t \geq 0} \|X_t\| = \infty$ п.в.*

► Теорему достаточно доказать для вещественного случайного процесса с независимыми приращениями. Так как случайный процесс X невырожден, то случайные величины $X_n - X_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, независимы, одинаково распределены. Без ограничения общности рассуждений можно считать, что $X_0 = 0$. В силу очевидного неравенства $\sup_{0 \leq t < \infty} |X_t| \geq \sup_{k \in \mathbb{N}} |X_k|$ достаточно доказать, что $\sup_{k \in \mathbb{N}} |X_k| = \infty$ почти всюду. Так как $|X_n| < \infty$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то $\{\sup_{k \in \mathbb{N}} |X_k| = \infty\} = \{\sup_{\mathbb{N} \ni k > n} |X_k - X_n| = \infty\}$. Обозначим $\mathcal{F}_n$ сигма-алгебру, порожденную случайными величинами $X_k - X_{k-1}, k \geq n$. Событие $A = \{\sup_{k \in \mathbb{N}} |X_k| = \infty\}$ можно представить в виде пересечения $A = \cap_{r=1}^{\infty} \{\sup_{\mathbb{N} \ni k > n} |X_k - X_n| > r\}$ событий из сигма-алгебры $\mathcal{F}_n$. Поэтому $A \in \mathcal{F}_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и, следовательно, $A \in \cap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$. По теореме 4.5.1 вероятность события A равна нулю или единице.

Докажем, что $\mathbb{P}\{A\} = 1$. Предположим противное, что $\mathbb{P}\{A\} = 0$. Поэтому $\sup_{k \in \mathbb{N}} |X_k| < \infty$ п.в. и, следовательно, $\lim_{n \to \infty} X_n n^{-1/m} = 0$ п.в. для любого $m \in \mathbb{N}$. Отсюда следует, что

$$\lim_{n \to \infty} \frac{X_n - X_{n-1}}{n^{1/m}} = \lim_{n \to \infty} \frac{X_n}{n^{1/m}} - \lim_{n \to \infty} \frac{(n-1)^{1/m}}{n^{1/m}} \frac{X_{n-1}}{(n-1)^{1/m}} = 0 \text{ п.в.}$$

Поэтому событие $\Omega' = \cap_{r=1}^{\infty} \cup_{n=r}^{\infty} \{|X_n - X_{n-1}| > n^{1/m}\}$ имеет нулевую вероятность, и, следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{|X_n - X_{n-1}| > n^{1/m}\}$ сходится. Если бы он расходился, то можно было бы применить теорему 2.1.16 к независимым событиям $\{|X_n - X_{n-1}| > n^{1/m}\}, n \in \mathbb{N}$, по которой $\mathbb{P}\{\Omega'\} = 1$. Так как случайные величины $X_n - X_{n-1}, n \in \mathbb{N}$, одинаково распределены, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{|X_1| > n^{1/m}\} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{|X_n - X_{n-1}| > n^{1/m}\} < \infty.$$

Сходимость ряда слева влечет конечность момента $\mathbb{E}|X_1|^m$. Это является следствием следующих соотношений

$$\mathbb{E}|X_1|^m = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(|X_1|^m \mathbb{1}_{\{n-1 < |X_1|^m \leq n\}}) \leq$$
$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbb{P}\{n-1 < |X_1|^m \leq n\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\{|X_1|^m > n\} < \infty.$$

Если $\mathbb{E}X_1 \neq 0$, то $\lim_{n \to \infty}(X_n/n) = \mathbb{E}X_1$ п.в. по усиленному закону больших чисел Колмогорова. Отсюда следует, что $\sup_{n \in \mathbb{N}} |X_n| = \infty$ п.в. Это противоречит предположению, что $\mathbb{P}\{A\} = 0$. Если $\mathbb{E}X_1 = 0$, то по центральной предельной теореме мы получим

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\Big\{\frac{X_n}{\sqrt{n \mathbb{E}|X_1|^2}} < x\Big\} = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} \, du$$

для любого $x \in \mathbb{R}$. С другой стороны,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big\{\frac{X_n}{\sqrt{n\mathbb{E}|X_1|^2}} < x\Big\} = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x < 0, \end{cases}$$

что снова ведет к противоречию, и, следовательно, $\mathbb{P}\{A\} = 1$. ◄

4.6. Процессы Леви

Процессы Леви составляют важную часть всех случайных процессов с независимыми приращениями. Некоторые свойства таких случайных процессов будут исследованы в этом параграфе. Предполагается, что все случайные процессы $X = \{X_t, t \geq 0\}$ определены на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, принимают значения в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$ и согласованы с данной фильтрацией $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t \colon \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}, t \geq 0\}$. Заметим, что в качестве параметрического множества выступает положительная полупрямая.

4.6.1. Определение. Регулярный справа, однородный случайный процесс $X = \{X_t,\ t \geq 0\}$ называется *процессом Леви* относительно фильтрации $\mathbb{F}$ или $\mathbb{F}$-*процессом Леви,* если $X_0 = 0$ и для любого $s > 0$ случайный процесс $\{X_{s+t} - X_s, t \geq 0\}$ не зависит от сигма-алгебры $\mathcal{F}_s$.

По теореме 4.1.3 любой процесс Леви имеет независимые приращения. По теореме 4.3.5 любой стохастически непрерывный, однородный случайный процесс $X = \{X_t, t \geq 0\}, X_0 = 0$, с независимыми приращениями имеет версию, которая является процессом Леви относительно своей естественной фильтрации.

Нам понадобятся некоторые обозначения. Для любого события $\Omega' \in \mathcal{F}$ положительной вероятности можно построить новое вероятностное пространство $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$, где $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \cap \Omega' = \{A \cap \Omega' \colon A \in \mathcal{F}\}$, $\mathbb{P}'\{A\} = \mathbb{P}\{A\}/\mathbb{P}\{\Omega'\}$ для любого $A \in \mathcal{F}'$. По данному случайному процессу $X = \{X_t, t \geq 0\}$ можно построить новый случайный процесс $X' = \{X'_t, t \geq 0\}, X'_t(\omega) = X_t(\omega), \omega \in \Omega'$, на вероятностном пространстве $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$. Пусть дан $\mathbb{F}$-марковский момент τ. Заметим, что для любого $h > 0$ функция $\tau + h$ также является $\mathbb{F}$-марковским моментом. Обозначим $\mathcal{F}_{\tau+} = \cap_{h>0} \mathcal{F}_{\tau+h}$.

4.6.2. Теорема. *Пусть даны* $\mathbb{F}$-*процесс Леви* $X = \{X_t, t \geq 0\}$ *и* $\mathbb{F}$-*марковский момент* $\tau, \mathbb{P}\{\tau < \infty\} > 0$. *Определим случайный процесс* $X' = \{X'_t, t \geq 0\}$ *на вероятностном пространстве* $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$

с $\Omega' = \{\tau < \infty\}$, *как указано перед формулировкой теоремы. Тогда семейство векторных функций* $\{X'_{\tau+t} - X'_\tau, t \geq 0\}$ *является* $\{\mathcal{F}_{\tau+t} \cap \Omega', t \geq 0\}$*-процессом Леви, который не зависит от* σ*-алгебры* $\mathcal{F}_{\tau+} \cap \Omega'$ *и одинаково распределен со случайным процессом* X.

► Подчеркнем, что независимость сигма-алгебры $\mathcal{F}_{\tau+} \cap \Omega'$ и случайного процесса $\{X'_{\tau+t} - X'_\tau, t \geq 0\}$ следует понимать как независимость относительно вероятности $\mathbb{P}'$.

Для любого $n \in \mathbb{N}$ функция $\tau \wedge n$ является $\mathbb{F}$-марковским моментом. По теоремам 3.9.10 и 3.9.15 случайный вектор $X_{(\tau\wedge n)+t}$ измерим относительно сигма-алгебры $\mathcal{F}_{(\tau\wedge n)+t}$. Поэтому его ограничение $X_{(\tau\wedge n)+t}(\omega), \omega \in \Omega'$, на множество Ω' является $\mathcal{F}_{\tau+t} \cap \Omega'$-измеримым. Так как $X_{\tau(\omega)+t}(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_{(\tau(\omega)\wedge n)+t}(\omega)$ для любого $\omega \in \Omega'$, то по теореме 1.5.7 векторная функция $X'_{\tau+t}$ измерима относительно сигма-алгебры $\mathcal{F}_{\tau+t} \cap \Omega'$. Тем самым доказано, что случайный процесс $\{X'_{\tau+t} - X'_\tau, t \geq 0\}$ согласован с фильтрацией $\{\mathcal{F}_{\tau+t} \cap \Omega', t \geq 0\}$. Отметим также, что он обращается в ноль в точке $t = 0$ и обладает свойством регулярности справа.

Докажем, что случайный процесс $\{X'_{\tau+t} - X'_\tau, t \geq 0\}$ и сигма-алгебра $\mathcal{F}_{\tau+} \cap \Omega'$ независимы, точнее $\mathbb{P}'$-независимы. По определению 2.1.8 требуется доказать, что σ-алгебры $\mathcal{G} = \sigma(X'_{\tau+t} - X'_\tau, t \geq 0)$ и $\mathcal{F}_{\tau+} \cap \Omega'$ независимы, точнее $\mathbb{P}'$-независимы. Сигма-алгебра $\mathcal{G}$ порождается π-классом $\mathcal{C}$ множеств вида $\{X'_{\tau+t_k} - X'_\tau \in A_k, k = 1, \ldots, n\}$, где $n \in \mathbb{N}$ и $0 \leq t_1 < \cdots < t_n$ – любые числа и $A_k \subseteq \mathbb{R}^d$, $k = 1, \ldots, n$, – любые борелевские множества. По теореме 2.1.5 сигма-алгебры $\mathcal{G}$ и $\mathcal{F}_{\tau+} \cap \Omega'$ независимы, если $\mathbb{P}'$-независимы любые представители классов $\mathcal{C}$ и $\mathcal{F}_{\tau+} \cap \Omega'$. Достаточно доказать, что случайные векторы $X'_{\tau+t_k} - X'_\tau, k = 1, \ldots, n$, не зависят от индикаторной функции $\mathbb{1}_A$ произвольного множества $A \in \mathcal{F}_{\tau+} \cap \Omega'$. По теореме 2.1.12 достаточно доказать равенство

$$\mathbb{E}' e^{i\sum_{k=1}^n \langle u_k, (X'_{\tau+t_k} - X'_\tau)\rangle + iu\mathbb{1}_A} = \mathbb{E}' e^{i\sum_{k=1}^n \langle u_k, (X'_{\tau+t_k} - X'_\tau)\rangle} \mathbb{E}' e^{iu\mathbb{1}_A} \quad (4.6.1)$$

для любых $u \in \mathbb{R}, u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^d$. Символ $\mathbb{E}'$ обозначает математическое ожидание, вычисляемое по вероятности $\mathbb{P}'$. Сначала это равенство будет доказано при дополнительном предположении, что множество V конечных значений марковского момента τ конечно. Множество A имеет вид $A = A' \cap \Omega'$, где $A' \in \mathcal{F}_{\tau+}$. По формуле полной вероятности для любого $h > 0$ выполняется равенство

$$\mathbb{E}' e^{i\sum_{k=1}^{n}\langle u_k,(X'_{\tau+t_k+h}-X'_{\tau+h})\rangle+iu\mathbb{1}_{A'\cap\Omega'}} = \\ = \sum_{v\in V}\mathbb{E}'\big(\mathbb{1}_{\{\tau=v\}}e^{i\sum_{k=1}^{n}\langle u_k,(X_{v+t_k+h}-X_{v+h})\rangle+iu\mathbb{1}_{A'}}\big).$$

Справа стоят $X_{v+t_k+h} - X_{v+h}$ и $\mathbb{1}_{A'}$ вместо $X'_{v+t_k+h} - X'_{v+h}$ и $\mathbb{1}_{A'\cap\Omega'}$, так как на множестве $\{\tau = v\} \subseteq \Omega'$ выполняются равенства $X'_t = X_t$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$ и $\mathbb{1}_{A'\cap\Omega'} = \mathbb{1}_{A'}$. Множество A' принадлежит сигма-алгебре $\mathcal{F}_{\tau+h}$. В силу теоремы 3.6.10 множество $\{\tau = v\}$ принадлежит $\mathcal{F}_v$. Так как $\mathcal{F}_v \subseteq \mathcal{F}_{v+h}$, то функция $\mathbb{1}_{\{\tau=v\}}\mathbb{1}_{A'}$ измерима относительно сигма-алгебры $\mathcal{F}_{v+h}$. Каждое слагаемое в разложении $\mathbb{1}_{\{\tau=v\}}e^{iu\mathbb{1}_{A'}} = \mathbb{1}_{\{\tau=v\}} + \sum_{j=1}^{\infty}\mathbb{1}_{\{\tau=v\}}\mathbb{1}_{A'}(iu)^j/j!$ измеримо относительно $\mathcal{F}_{v+h}$ и, следовательно, функция $\mathbb{1}_{\{\tau=v\}}e^{iu\mathbb{1}_{A'}}$ измерима относительно $\mathcal{F}_{v+h}$. Случайный процесс $\{X_{t+v+h} - X_{v+h},\, t \ge 0\}$ не зависит (не зависит по отношению к вероятности $\mathbb{P}$) от сигма-алгебры $\mathcal{F}_{v+h}$. Поэтому функция $\mathbb{1}_{\{\tau=v\}}e^{iu\mathbb{1}_{A'}}$ не зависит (по отношению к вероятности $\mathbb{P}$) от случайных векторов $X_{v+t_k+h} - X_{v+h}, k = 1, \ldots, n$. Отсюда следует, что

$$\mathbb{E}' e^{i\sum_{k=1}^{n}\langle u_k,(X'_{\tau+t_k+h}-X'_{\tau+h})\rangle+iu\mathbb{1}_{A}} = \\ = \sum_{v\in V}\mathbb{E}'\big(\mathbb{1}_{\{\tau=v\}}e^{iu\mathbb{1}_{A'}}e^{i\sum_{k=1}^{n}\langle u_k,(X_{v+t_k+h}-X_{v+h})\rangle}\big) = \\ = \frac{1}{\mathbb{P}\{\Omega'\}}\sum_{v\in V}\mathbb{E}\big(\mathbb{1}_{\{\tau=v\}}e^{iu\mathbb{1}_{A'}}e^{i\sum_{k=1}^{n}\langle u_k,(X_{v+t_k+h}-X_{v+h})\rangle}\big) = \\ = \frac{1}{\mathbb{P}\{\Omega'\}}\sum_{v\in V}\mathbb{E}\big(\mathbb{1}_{\{\tau=v\}}e^{iu\mathbb{1}_{A'}}\big)\mathbb{E}e^{i\sum_{k=1}^{n}\langle u_k,(X_{v+t_k+h}-X_{v+h})\rangle} = \\ = \sum_{v\in V}\mathbb{E}'\big(\mathbb{1}_{\{\tau=v\}}e^{iu\mathbb{1}_{A'\cap\Omega'}}\big)\mathbb{E}e^{i\sum_{k=1}^{n}\langle u_k,X_{t_k}\rangle} = \mathbb{E}'e^{iu\mathbb{1}_{A}}\mathbb{E}e^{i\sum_{k=1}^{n}\langle u_k,X_{t_k}\rangle}.$$

В частности, если $A = \varnothing$, то

$$\mathbb{E}' e^{i\sum_{k=1}^{n}\langle u_k,(X'_{\tau+t_k+h}-X'_{\tau+h})\rangle} = \mathbb{E}e^{i\sum_{k=1}^{n}\langle u_k,X_{t_k}\rangle}. \tag{4.6.2}$$

Отсюда и из предыдущих равенств следует, что

$$\mathbb{E}' e^{i\sum_{k=1}^{n}\langle u_k,(X'_{\tau+t_k+h}-X'_{\tau+h})\rangle+iu\mathbb{1}_{A}} = \\ = \mathbb{E}'e^{iu\mathbb{1}_{A}}\mathbb{E}'e^{i\sum_{k=1}^{n}\langle u_k,(X'_{\tau+t_k+h}-X'_{\tau+h})\rangle}.$$

Полагая $h = h_m \downarrow 0$ по некоторой последовательности $\{h_m\}_{m\geq 1}$, мы придем к равенству (4.6.1). Предельный переход возможен по теореме об ограниченной сходимости. Здесь мы воспользовались непрерывностью справа случайного процесса $\{X'_{\tau+t} - X'_\tau, t \geq 0\}$. Предельный переход по $h = h_m \downarrow 0$ в (4.6.2) приводит к равенству

$$\mathbb{E}' e^{i \sum_{k=1}^{n} \langle u_k, (X'_{\tau+t_k} - X'_\tau) \rangle} = \mathbb{E} e^{i \sum_{k=1}^{n} \langle u_k, X_{t_k} \rangle}. \qquad (4.6.3)$$

Докажем, что равенства (4.6.1) и (4.6.3) справедливы для данного $\mathbb{F}$-марковского момента $\tau, \mathbb{P}\{\tau < \infty\} > 0$. По теореме 3.6.12 существуют марковские моменты $\tau_n, n \in \mathbb{N}$, такие, что каждый из них принимает конечное число значений и $\tau_n \downarrow \tau$ при $n \uparrow \infty$. Равенства (4.6.1) и (4.6.3) справедливы для $\tau = \tau_n$. С помощью предельного перехода по $n \uparrow \infty$ можно убедиться, что равенства (4.6.1) и (4.6.3) справедливы в общем случае.

Из равенства (4.6.1) следует, что σ-алгебра $\mathcal{F}_\tau \cap \Omega'$ и случайный процесс $\{X'_{\tau+t} - X'_\tau, t \geq 0\}$ независимы, точнее $\mathbb{P}'$-независимы. Из равенства (4.6.3) следует, что конечномерные распределения случайных процессов $X = \{X_t, t \geq 0\}$ и $\{X'_{\tau+t} - X'_\tau, t \geq 0\}$ совпадают. Положив $n = 2, t_1 = s+h, t_2 = t+h, s < t, h > 0, u_1 = -u, u_2 = u, u \in \mathbb{R}^d$ в равенстве (4.6.3), можно убедиться, что

$$\begin{aligned}\mathbb{E}' e^{i\langle u, (X'_{\tau+t+h} - X'_{\tau+s+h})\rangle} &= \mathbb{E}' e^{i\langle -u, (X'_{\tau+s+h} - X'_\tau)\rangle + i\langle u, (X'_{\tau+t+h} - X'_\tau)\rangle} = \\ &= \mathbb{E} e^{i\langle -u, X_{s+h}\rangle + i\langle u, X_{t+h}\rangle} = \mathbb{E} e^{i\langle -u, X_s\rangle + i\langle u, X_t\rangle} = \\ &= \mathbb{E}' e^{i\langle -u, (X'_{\tau+s} - X'_\tau)\rangle + i\langle u, (X'_{\tau+t} - X'_\tau)\rangle} = \mathbb{E}' e^{i\langle u, (X'_{\tau+t} - X'_{\tau+s})\rangle}.\end{aligned}$$

Равенство характеристических функций слева и справа означает, что случайный процесс $\{X'_{\tau+t} - X'_\tau, t \geq 0\}$ является однородным.

Далее, в предыдущих рассуждениях вместо τ можно взять $\tau + s$ для любого $s > 0$. Из равенства (4.6.1) с $\tau + s$ вместо τ следует независимость, точнее $\mathbb{P}'$-независимость, случайного процесса $\{X'_{\tau+s+t} - X'_{\tau+s}, t \geq 0\}$ и сигма-алгебры $\mathcal{F}_{\tau+s} \cap \Omega'$. ◄

4.6.3. Следствие. *Если $X = \{X_t, t \geq 0\}$ является $\mathbb{F}$-процессом Леви, то для любого конечного $\mathbb{F}$-марковского момента τ случайный процесс $\{X_{\tau+t} - X_\tau, t \geq 0\}$ является $\{\mathcal{F}_{\tau+t}, t \geq 0\}$-процессом Леви, не зависит от сигма-алгебры $\mathcal{F}_{\tau+}$ и одинаково распределен со случайным процессом X.*

► В теореме 4.6.2 следует положить $\Omega' = \{\tau < \infty\} = \Omega$, так как $\tau < \infty$. Все утверждения выполняются по теореме 4.6.2. ◄

4.6.4. Теорема. *Пусть дан любой невырожденный процесс Леви $X = \{X_t, t \geq 0\}$ относительно непрерывной справа фильтрации $\mathbb{F}$. Предположим, что $\|X_t - X_{t-}\| \leq c$ для всех $t > 0$ и для некоторого $c > 0$. Определим функции $\tau_n \colon \Omega \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}, n \in \mathbb{N}$, положив $\tau_1 = \inf\{t > 0\colon \|X_t\| > c\}, \tau_{n+1} = \inf\{t > 0\colon t > \tau_n, \|X_t - X_{\tau_n}\| > c\}$. Тогда функции $\tau_1, \tau_{n+1} - \tau_n, n \in \mathbb{N}$, являются независимыми, одинаково распределенными случайными величинами.*

► По теореме 4.5.3 выполняется равенство $\sup_{t \geq 0} \|X_t\| = \infty$ п.в. Без ограничения общности рассуждений можно считать, что это равенство выполняется на всем Ω.

По следствию 4.6.3 случайные процессы $\{X_{\tau_n + t} - X_{\tau_n}, t \geq 0\}$ и $X = \{X_t, t \geq 0\}$ одинаково распределены. Поэтому случайные величины $\tau_1 = \inf\{t > 0\colon \|X_t\| > c\}$ и $\sigma = \inf\{t > 0\colon \|X_{\tau_n + t} - X_{\tau_n}\| > c\}$ одинаково распределены. Из определения функции σ следует, что $\sigma = \inf\{t - \tau_n\colon t > \tau_n, \|X_t - X_{\tau_n}\| > c\}$. Сравнив ее с функцией $\tau_{n+1} = \inf\{t > 0\colon t > \tau_n, \|X_t - X_{\tau_n}\| > c\}$, мы видим, что $\sigma = \tau_{n+1} - \tau_n$. Тем самым доказано, что случайные величины $\tau_1, \tau_{n+1} - \tau_n, n \in \mathbb{N}$, одинаково распределены. По следствию 4.6.3 случайный процесс $\{X_{\tau_n + t} - X_{\tau_n}, t \geq 0\}$ не зависит от сигма-алгебры $\mathcal{F}_{\tau_n}$. По теореме 3.6.10 марковский момент τ_n измерим относительно сигма-алгебры $\mathcal{F}_{\tau_n}$. Так как случайная величина $\sigma = \tau_{n+1} - \tau_n$ определяется случайным процессом $\{X_{\tau_n + t} - X_{\tau_n}, t \geq 0\}$, то она не зависит от τ_n. Далее, заметим, что $\tau_n = \tau_1 + \sum_{k=2}^{n} (\tau_k - \tau_{k-1})$. Так как слагаемые неотрицательны, то $\tau_1, \tau_k - \tau_{k-1} \leq \tau_n$ для всех $k = 2, \ldots, n$. По теореме 3.6.9 имеют место включения $\mathcal{F}_{\tau_1} \subseteq \mathcal{F}_{\tau_n}$ и $\mathcal{F}_{\tau_k - \tau_{k-1}} \subseteq \mathcal{F}_{\tau_n}$. Поэтому случайная величина $\sigma = \tau_{n+1} - \tau_n$ не зависит от случайных величин $\tau_1, \tau_k - \tau_{k-1}, k = 2, \ldots, n$. При $n = 2$ это означает, что случайные величины τ_1 и $\tau_2 - \tau_1$ независимы. Далее можно рассуждать по индукции. Предположим, что для некоторого $n \in \mathbb{N}$ случайные величины $\tau_1, \tau_k - \tau_{k-1}, k = 2, \ldots, n$, независимы. По доказанному выше случайная величина $\tau_{n+1} - \tau_n$ не зависит от $\tau_1, \tau_k - \tau_{k-1}, k = 2, \ldots, n$, и, следовательно, случайные величины $\tau_1, \tau_k - \tau_{k-1}, k = 2, \ldots, n+1$, независимы. По индуктивному принципу случайные величины $\tau_1, \tau_n - \tau_{n-1}, n \geq 2$, независимы. ◄

4.6.5. Теорема. *Пусть дан процесс Леви $X = \{X_t, t \geq 0\}$ относительно непрерывной справа фильтрации $\mathbb{F}$. Если $\|X_t - X_{t-}\| \leq c$ для всех $t > 0$ и для некоторого $c > 0$, то $\mathbb{E} \exp\{\alpha \|X_t\|\} < \infty$ для любого $t \geq 0$ и для некоторого $\alpha > 0$.*

► Компоненты случайного процесса $X=\{(X_{1,t},\ldots,X_{d,t}),t\geq 0\}$ являются $\mathbb{F}$-процессами Леви. Если $\mathbb{E}\exp\{\alpha|X_{k,t}|\}<\infty$ для всех $k=1,\ldots,d$, то по неравенству Гельдера

$$\mathbb{E}\exp\{\alpha d^{-1}\|X_t\|\}\leq\prod_{k=1}^{d}\big(\mathbb{E}\exp\{\alpha|X_{k,t}|\}\big)^{1/d}<\infty.$$

Поэтому можно считать, что X – вещественный случайный процесс.

Определим функции $\tau_n\colon\Omega\to\overline{\mathbb{R}}_+=[0,\infty],n\in\mathbb{N}$, положив $\tau_1=\inf\{t>0\colon|X_t|>c\}$ и $\tau_{n+1}=\inf\{t>0\colon t>\tau_n,|X_t-X_{\tau_n}|>c\}$.

Докажем неравенство

$$|X_{\tau_n\wedge t}|\leq 2nc \text{ для всех } n\in\mathbb{N},t>0. \tag{4.6.4}$$

Обратим внимание, что $\tau_n<\tau_{n+1}$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Из условия $\sup_{t\geq 0}|X_t-X_{t-}|\leq c$ следует неравенство $|X_{\tau_n}-X_{\tau_n-}|\leq c$ для любого $n\in\mathbb{N}$. Для любого $0<t<\tau_1$ выполняются неравенства $|X_{\tau_1\wedge t}|=|X_t|<c$ и $|X_{\tau_1}|\leq|X_{\tau_1}-X_t|+|X_t|\leq|X_{\tau_1}-X_t|+c$. Полагая $t\uparrow\tau_1$, мы получим (4.6.4) для $n=1$. Далее можно рассуждать по индукции и доказать неравенство (4.6.4) в общем случае.

Фиксируем $t>0$. Если $|X_t|>2nc$, то $\tau_n<t$. Действительно, если $\tau_n\geq t$, то $|X_t|=|X_{\tau_n\wedge t}|\leq 2nc$ по неравенству (4.6.4). Поэтому $\{|X_t|>2nc\}\subseteq\{\tau_n<t\}$. Отсюда следует, что

$$\mathbb{P}\{|X_t|>2nc\}\leq\mathbb{P}\{\tau_n<t\}=\mathbb{P}\{e^{-\tau_n}>e^{-t}\}\leq e^t\mathbb{E}e^{-\tau_n}=e^t(\mathbb{E}e^{-\tau_1})^n.$$

Последнее равенство следует из равенства $\tau_n=\tau_1+\cdots+(\tau_n-\tau_{n-1})$ и того, что случайные величины $\tau_1,\tau_2-\tau_1,\ldots,\tau_n-\tau_{n-1}$ независимы и одинаково распределены по теореме 4.6.4. Заметим, что верно неравенство $\beta=\mathbb{E}e^{-\tau_1}<1$. Для $\alpha\in(0,-\ln\beta/(2c))$ мы имеем, что

$$\begin{aligned}\mathbb{E}e^{\alpha|X_t|}&=\mathbb{E}(e^{\alpha|X_t|}\mathbb{1}_{\{|X_t|\leq 2c\}})+\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}(e^{\alpha|X_t|}\mathbb{1}_{\{2nc<|X_t\leq 2(n+1)c\}})\leq\\&\leq e^{2\alpha c}+\sum_{n=1}^{\infty}e^{2\alpha(n+1)c}\mathbb{P}\{|X_t|>2nc\}\leq\\&\leq e^{2\alpha c}+e^t\sum_{n=1}^{\infty}e^{2\alpha(n+1)c+n\ln\beta}<\infty.\ \blacktriangleleft\end{aligned}$$

Глава 5
Пуассоновский процесс

Пуассоновский процесс возникает естественным образом при исследовании большого числа прикладных задач. Он выступает в качестве основного средства исследования радиоактивных веществ, при исследовании систем массового обслуживания, при создании радиотехнических устройств. Пуассоновский процесс является представителем нескольких классов случайных процессов, например, он имеет независимые приращения и является примером марковского процесса. Пуассоновский процесс является основным «кирпичиком» при построении класса безгранично делимых процессов. Сам термин, как утверждают некоторые исследователи, был введен в обиход Лундбергом (Ernst Filip Oskar Lundberg) в своей диссертации по теории риска в 1903 году. Пуассоновский процесс назван в честь Пуассона (Simeón Denis Poisson). Пуассон считается первооткрывателем пуассоновского распределения, который на самом деле был открыт ранее Муавром (Abraham de Moivre).

5.1. Модель пуассоновского процесса

Имеется несколько моделей пуассоновского процесса. Здесь будет построена модель, основанная на суммировании случайного числа независимых случайных величин. Еще об одной модели пуассоновского процесса будет рассказано в другом параграфе этой главы. Предполагается, что все рассматриваемые случайные величины определены на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

5.1.1. Определение. Вещественный случайный процесс $\Pi = \{\Pi_t,\ t \in T\}$, где $T = [a, \infty)$ или $T = [a, b], a, b \in \mathbb{R}$, называется *пуассоновским* процессом с параметром $\lambda > 0$, если

(i) $\mathbb{P}\{\Pi_a = 0\} = 1$;

(ii) для любых $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n, n \geq 2$, из T случайные величины $\Pi_{t_k} - \Pi_{t_{k-1}}, k = 1, \ldots, n$, независимы;

(iii) для любых чисел $s, t \in T, a \leq s < t$, разность $\Pi_t - \Pi_s$ имеет пуассоновское распределение с параметром $\lambda(t-s)$

$$\mathbb{P}\{\Pi_t - \Pi_s = n\} = \frac{\lambda^n (t-s)^n}{n!} e^{-\lambda(t-s)}, n \in \mathbb{Z}, n \geq 0.$$

5.1.2. Теорема. *Пуассоновский процесс существует.*

► Докажем существование пуассоновского процесса с параметрическим множеством $T = [a, b]$. В силу следствия 3.1.4 можно считать, что на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ определены независимые случайные величины N, ξ_n, $n \in \mathbb{N}$, причем N имеет пуассоновское распределение с параметром $\lambda(b-a)$, а каждая из случайных величин ξ_n, $n \in \mathbb{N}$, имеет равномерное распределение на сегменте $[a, b]$. Обозначим $\mathbb{1}_t$ индикаторную функцию сегмента $[a, t]$. Убедимся, что семейство случайных сумм

$$\Pi_t = \sum_{n=1}^{N} \mathbb{1}_t(\xi_n), t \in T = [a, b], \tag{5.1.1}$$

является пуассоновским процессом с параметром λ. Непосредственно видно, что $P\{\Pi_a = 0\} = 1$. Вычислим совместную характеристическую функцию

$$\phi(u_1, \ldots, u_n) = \mathbb{E} e^{i \sum_{k=1}^n u_k (\Pi_{t_k} - \Pi_{t_{k-1}})}, u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R},$$

случайных величин $\Pi_{t_k} - \Pi_{t_{k-1}}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, для любых чисел $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n \leq b$. Предположим дополнительно, что $t_n = b$. Позже это условие будет устранено. С помощью формулы полной вероятности нетрудно убедиться, что

$$\begin{aligned}
\phi(u_1, \ldots, u_n) &= \mathbb{E} e^{i \sum_{k=1}^n u_k \sum_{m=1}^N [\mathbb{1}_{t_k}(\xi_m) - \mathbb{1}_{t_{k-1}}(\xi_m)]} = \\
&= \mathbb{E} e^{i \sum_{m=1}^N \sum_{k=1}^n u_k [\mathbb{1}_{t_k}(\xi_m) - \mathbb{1}_{t_{k-1}}(\xi_m)]} = \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{P}\{N = p\} \mathbb{E} e^{i \sum_{m=1}^p \sum_{k=1}^n u_k [\mathbb{1}_{t_k}(\xi_m) - \mathbb{1}_{t_{k-1}}(\xi_m)]} = \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{P}\{N = p\} \big(\mathbb{E} e^{i \sum_{k=1}^n u_k [\mathbb{1}_{t_k}(\xi_1) - \mathbb{1}_{t_{k-1}}(\xi_1)]}\big)^p.
\end{aligned}$$

Математическое ожидание можно вычислить следующим образом

$$\mathbb{E}e^{i\sum_{k=1}^{n}u_k[\mathbb{1}_{t_k}(\xi_1)-\mathbb{1}_{t_{k-1}}(\xi_1)]} = \frac{1}{b-a}\int_a^b e^{i\sum_{k=1}^{n}u_k[\mathbb{1}_{t_k}(x)-\mathbb{1}_{t_{k-1}}(x)]}\,dx =$$
$$= \frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{iu_k}\,dx = \frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n} e^{iu_k}(t_k - t_{k-1}).$$

Так как $\mathbb{P}\{N = p\} = (\lambda(b-a))^p e^{-\lambda(b-a)}/p!$ и выполняется равенство $b - a = (t_1 - t_0) + \cdots + (t_n - t_{n-1})$, то

$$\phi(u_1,\ldots,u_n) = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{\lambda^p}{p!}e^{-\lambda(b-a)}\Big(\sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})e^{iu_k}\Big)^p =$$
$$= e^{\lambda\sum_{k=1}^{n}(t_k-t_{k-1})e^{iu_k}-\lambda(b-a)} = e^{\lambda\sum_{k=1}^{n}(t_k-t_{k-1})(e^{iu_k}-1)}.$$

Освободимся от предположения, что $t_n = b$. Пусть $t_n < b$. Добавим к $t_1,\ldots,t_n$ число $t_{n+1} = b$. По доказанному выше для любых вещественных чисел $u_1,\ldots,u_{n+1}$ выполняется равенство

$$\mathbb{E}e^{i\sum_{k=1}^{n+1}u_k(X_{t_k}-X_{t_{k-1}})} = \prod_{k=1}^{n+1} e^{\lambda(t_k-t_{k-1})(e^{iu_k}-1)}.$$

При $u_{n+1} = 0$ оно принимает требуемый вид

$$\mathbb{E}e^{i\sum_{k=1}^{n}u_k(X_{t_k}-X_{t_{k-1}})} = \prod_{k=1}^{n} e^{\lambda(t_k-t_{k-1})(e^{iu_k}-1)} \tag{5.1.2}$$

для любых чисел $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n \le b$. Если $u_k = 0$, $k \ne r$, то

$$\mathbb{E}e^{iu_r(\Pi_{t_r}-\Pi_{t_{r-1}})} = e^{\lambda(t_r-t_{r-1})(e^{iu_r}-1)}.$$

При $t = t_r$ и $s = t_{r-1}$ это равенство равносильно тому, что разность $\Pi_t - \Pi_s$ имеет пуассоновское распределение с параметром $\lambda(t-s)$. Тем самым доказано, что выполнено третье условие из определения пуассоновского процесса. Из равенства

$$\mathbb{E}e^{i\sum_{k=1}^{n}u_k(\Pi_{t_k}-\Pi_{t_{k-1}})} = \prod_{k=1}^{n}\mathbb{E}e^{iu_k(\Pi_{t_k}-\Pi_{t_{k-1}})}$$

следует, в силу теоремы 2.1.12, что случайные величины $\Pi_{t_k} - \Pi_{t_{k-1}}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, независимы.

Докажем теперь, что существует пуассоновский процесс с параметрическим множеством $[a,\infty)$. Полупрямую $[a,\infty)$ можно представить в виде объединения $T=\cup_{n=1}^{\infty}[a+n-1,a+n]$ счетного числа сегментов единичной длины. Построим независимые пуассоновские процессы $\{\Pi_t^{(n)}, t\in[a+n-1,a+n]\}$, $n\in\mathbb{N}$, с общим параметром λ. Определим случайный процесс $\{\Pi_t, t\in T\}$, положив

$$\Pi_t=\Pi_t^{(1)}, t\in[a,a+1],$$
$$\Pi_t=\sum_{k=1}^{n}\Pi_{a+k}^{(k)}+\Pi_t^{(n+1)}, t\in[a+n,a+n+1], n\in\mathbb{N}.$$

Ясно, что $\Pi_a=0$ п.в. Чтобы убедиться, что так построенный случайный процесс удовлетворяет условиям из определения пуассоновского процесса, достаточно доказать равенство (5.1.2). Можно поступить следующим образом. Сначала следует «склеить» случайные процессы $\{\Pi_t^{(1)}, t\in[a,a+1]\}$ и $\{\Pi_t^{(2)}, t\in[a+1,a+2]\}$. Затем полученный случайный процесс следует склеить с $\{\Pi_t^{(3)}, t\in[a+2,a+3]\}$. Результатом такого неограниченного процесса склеивания получится случайный процесс $\{\Pi_t, t\geq a\}$. Задача сводится к доказательству того, что случайный процесс

$$\Pi_t=\Pi_t^{(1)}, t\in[a,b], \Pi_t=\Pi_b^{(1)}+\Pi_t^{(2)}, t\in[b,c], n\in\mathbb{N},$$

«склеенный» из независимых пуассоновских процессов $\Pi^{(1)}=\{\Pi_t^{(1)}, t\in[a,b]\}$ и $\Pi^{(2)}=\{\Pi_t^{(2)}, t\in[b,c]\}$ с общим параметром λ, является пуассоновским процессом с параметром λ. Убедимся в этом.

Разобьем сегмент $[a,c]$ точками $a\leq t_1\cdots<t_n\leq c, n>2$. Пусть $a=t_0<t_1<\cdots<t_m\leq b$ и $b<t_{m+1}<\cdots t_n\leq c$. Преобразуем сумму $u_1(\Pi_{t_1}-\Pi_{t_0})+\cdots+u_n(\Pi_{t_n}-\Pi_{t_{n-1}})$ следующим образом

$$\sum_{k=1}^{n}u_k(\Pi_{t_k}-\Pi_{t_{k-1}})=\sum_{k=1}^{m}u_k(\Pi_{t_k}^{(1)}-\Pi_{t_{k-1}}^{(1)})+u_{m+1}(\Pi_b^{(1)}-\Pi_{t_m}^{(1)})+$$
$$+u_{m+1}(\Pi_{t_{m+1}}^{(2)}-\Pi_b^{(2)})+\sum_{k=m+2}^{n}u_k(\Pi_{t_k}^{(2)}-\Pi_{t_{k-1}}^{(2)}).$$

Так как случайные процессы $\{\Pi_t^{(1)}, t\in[a,b]\}$ и $\{\Pi_t^{(2)}, t\in[b,c]\}$ независимы, то

$$\phi(u_1,\ldots,u_{n-1}) = \mathbb{E}e^{i\sum_{k=1}^{m}u_k(\Pi^{(1)}_{t_k}-\Pi^{(1)}_{t_{k-1}})+iu_{m+1}(\Pi^{(1)}_b-\Pi^{(1)}_{t_m})}\times$$
$$\times\,\mathbb{E}e^{iu_{m+1}(\Pi^{(2)}_{t_{m+1}}-\Pi^{(2)}_b)+i\sum_{k=m+2}^{n}u_k(\Pi^{(2)}_{t_k}-\Pi^{(2)}_{t_{k-1}})}.$$

Обозначим J_1 и J_2 первый и второй сомножители справа. По доказанному выше они имеют следующий вид

$$J_1 = e^{\lambda(b-t_m)(e^{iu_{m+1}}-1)}\prod_{k=1}^{m}e^{\lambda(t_k-t_{k-1})(e^{iu_k}-1)},$$
$$J_2 = e^{\lambda(t_{m+1}-b)(e^{iu_{m+1}}-1)}\prod_{k=m+2}^{n}e^{\lambda(t_k-t_{k-1})(e^{iu_k}-1)}.$$

Отсюда следует требуемое равенство (5.1.2). ◀

5.1.3. Задача. Доказать, что случайная величина $\Pi_t-\Pi_s$ имеет все моменты. В частности,

$$\mathbb{E}|\Pi_t-\Pi_s| = \lambda(t-s), \mathbb{E}|\Pi_t-\Pi_s|^2 = \lambda(t-s)+\lambda^2(t-s)^2,$$
$$\mathbb{E}|\Pi_t-\Pi_s|^3 = \lambda(t-s)+3\lambda^2(t-s)^2+\lambda^3(t-s)^3.$$

Знак модуля можно было бы не ставить, так как $\Pi_t-\Pi_s \geq 0$ п.в.

5.2. Конечномерные распределения

Здесь будут выведены конечномерные распределения пуассоновского процесса с параметрическим множеством $\mathbb{R}_+$. Все сказанное можно перенести на пуассоновские процессы с другими параметрическими множествами.

Пусть пуассоновский процесс $\Pi = \{\Pi_t, t \geq 0\}$ с параметром λ определен на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. Для любых $n\in\mathbb{N}$ и $0=t_0<t_1<\cdots<t_n$ функция

$$\mathbb{P}_{t_1,\ldots,t_n}\{A\} = \mathbb{P}\{(\Pi_{t_1},\ldots,\Pi_{t_n})\in A\}, A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n),$$

называется конечномерным распределением пуассоновского процесса. В силу равенств

$$\mathbb{P}\{\Pi_0=0\}=1, \mathbb{P}\{\Pi_t-\Pi_s=k\} = \frac{\lambda^k(t-s)^k}{k!}e^{-\lambda(t-s)}$$

для любых $0 \le s < t$ и $k \in \mathbb{Z}, k \ge 0$, и независимости приращений пуассоновского процесса выполняются следующие соотношения

$$\mathbb{P}_{t_1,\dots,t_n}(A) = \sum_{(k_1,\dots,k_n)\in A} \mathbb{P}\{\Pi_{t_1} = k_1, \dots, \Pi_{t_n} = k_n\} =$$

$$= \sum_{(k_1,\dots,k_n)\in A} \mathbb{P}\{\Pi_{t_1} = k_1, \Pi_{t_{j+1}} - \Pi_{t_j} = k_{j+1} - k_j, j = 0, \dots, n-1\} =$$

$$= \sum_{(k_1,\dots,k_n)\in A} \frac{(\lambda t_1)^{k_1}}{k_1!} e^{-\lambda t_1} \prod_{j=2}^{n} \frac{((\lambda(t_j - t_{j-1}))^{k_j - k_{j-1}}}{(k_j - k_{j-1})!} e^{-\lambda(t_j - t_{j-1})}.$$

Отсюда следует, что конечномерные распределения пуассоновского процесса однозначно определяются вероятностями $\mathbb{P}\{\Pi_0 = 0\} = 1$ и

$$\mathbb{P}\{\Pi_{t_j} = k_j, j = 1, \dots, n\} = e^{-\lambda t_n} \prod_{j=1}^{n} \frac{(\lambda(t_j - t_{j-1}))^{k_j - k_{j-1}}}{(k_j - k_{j-1})!} \tag{5.2.1}$$

для любых чисел $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ и для любых целых чисел $0 = k_0 \le k_1 \le \dots \le k_n$. Возрастание чисел $k_j, j = 1, \dots, n$, является следствием возрастания случайных величин $\Pi_{t_1}, \dots, \Pi_{t_n}$.

5.2.1. Теорема. *Пусть случайный процесс* $\Pi = \{\Pi_t, t \ge 0\}$ *удовлетворяет условиям* $\mathbb{P}\{\Pi_0 = 0\} = 1$ *и* (5.2.1). *Тогда он является пуассоновским процессом с параметром* λ.

► Убедимся, что выполнены все условия из определения пуассоновского процесса. Условие $\mathbb{P}\{\Pi_0 = 0\} = 1$ выполняется по предположению. Из (5.2.1) следует, что для любых чисел s и $t, 0 \le s < t$, случайная величина $\Pi_t - \Pi_s$ имеет пуассоновское распределение с параметром $\lambda(t-s)$,

$$\mathbb{P}\{\Pi_t - \Pi_s = k\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\{\Pi_s = n, \Pi_t = k + n\} =$$

$$= \frac{\lambda^k (t-s)^k}{k!} e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda s)^n}{n!} = \frac{\lambda^k (t-s)^k}{k!} e^{-\lambda(t-s)}.$$

В силу (5.2.1) для любых чисел $n \in \mathbb{N}, n \ge 2, 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ и для любых целых чисел $0 = k_0 \le k_1 \le \dots \le k_n$ выполняется равенство

$$\mathbb{P}\{\Pi_{t_j} - \Pi_{t_{j-1}} = k_j, j = 1, \dots, n\} = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}\{\Pi_{t_j} - \Pi_{t_{j-1}} = k_j\},$$

которое означает, что случайные величины $\Pi_{t_k} - \Pi_{t_{k-1}}, k = 1, \ldots, n$, независимы. ◄

5.3. Стандартный пуассоновский процесс

Из конструкции пуассоновского процесса (5.1.1) следует, что его траектории являются непрерывными справа ступенчатыми функциями с единичными скачками. Траектории произвольного пуассоновского процесса могут быть устроены более сложным образом. Ниже будет доказано, что произвольный пуассоновский процесс имеет версию с перечисленными свойствами. Всюду в этом параграфе предполагается, что все рассматриваемые случайные величины определены на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

5.3.1. Определение. Пуассоновский процесс $\Pi = \{\Pi_t, t \in T\}$, где $T = [a, b]$ или $T = [a, \infty), a, b \in \mathbb{R}$, называется *стандартным,* если $\Pi_a = 0$ и все его траектории являются непрерывными справа ступенчатыми функциями с единичными скачками.

5.3.2. Теорема. *Любой пуассоновский процесс* $\Pi = \{\Pi_t, t \in T\}$ *с параметрическим множеством* $T = [a, b]$ *или* $T = [a, \infty)$ *имеет стандартную версию.*

► Достаточно рассмотреть случай $T = [0, \infty)$. Пусть дан пуассоновский процесс $\Pi = \{\Pi_t, t \geq 0\}$ с параметром $\lambda > 0$. Он стохастически непрерывен, так как $\varepsilon\mathbb{P}\{(\Pi_t - \Pi_s) > \varepsilon\} \leq \mathbb{E}(\Pi_t - \Pi_s) = \lambda(t - s)$ для любых $0 \leq s < t$ и $\varepsilon > 0$ в силу неравенства Маркова–Чебышева. По теореме 3.3.5 пуассоновский процесс Π имеет регулярную справа версию. Можно считать, что сам пуассоновский процесс Π является регулярным справа.

Далее будет доказано, что существует событие Ω' единичной вероятности такое, что все траектории $\Pi_t(\omega), t \geq 0, \omega \in \Omega'$, являются непрерывными справа неубывающими ступенчатыми функциями с единичными скачками. Стандартную версию $\Pi' = \{\Pi'_t, t \geq 0\}$ пуассоновского процесса Π можно построить следующим образом

$$\Pi'_t(\omega) = \begin{cases} \Pi_t(\omega), & \text{если } \omega \in \Omega', \\ \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\mathbb{1}_{\{[n-1,n)\}}(t), & \text{если } \omega \notin \Omega'. \end{cases}$$

Построим требуемое событие Ω'. Для любых $h > 0$ и $t \geq 0$ выполняется неравенство

$$\mathbb{P}\{\Pi_{t+h} - \Pi_t \geq 2\} = 1 - e^{-\lambda h} - \lambda h e^{-\lambda h} \leq \frac{1}{2}(\lambda h)^2.$$

Разобьем сегмент $[0,n], n \in \mathbb{N}$, точками $t_{n,k} = kn2^{-m}$, $k = 0,\ldots,2^m$. Вероятность события $\Omega_{n,m} = \{\max_{1\le k\le 2^m}(\Pi_{t_{n,k}} - \Pi_{t_{n,k-1}}) \ge 2\}$ можно оценить следующим образом

$$\mathbb{P}\{\Omega_{n,m}\} \le 2^m \frac{1}{2}(\lambda n 2^{-m})^2 = \lambda^2 n^2 2^{-m-1} \to 0 \text{ при } m \to \infty.$$

Поэтому событие $\cap_{m=1}^{\infty}\Omega_{n,m}$ имеет нулевую вероятность и, следовательно, его дополнение $\Omega_n = \cup_{m=1}^{\infty}\Omega_{n,m}^c$ и пересечение $\cap_{n=1}^{\infty}\Omega_n$ имеют единичные вероятности. Из соотношений $\mathbb{P}\{\Pi_r = 0\} = e^{-\lambda r} \to 0$ при $r \to \infty$ следует, что событие $\cap_{r=1}^{\infty}\{\Pi_r = 0\}$ имеет нулевую вероятность. Его дополнение $\cup_{r=1}^{\infty}\{\Pi_r \ge 1\}$ имеет единичную вероятность. Для любых $0 \le s < t$ пуассоновская случайная величина $\Pi_t - \Pi_s$ почти всюду неотрицательна. Убедимся, что событие $\Omega' = \cap_{n=1}^{\infty}\Omega_n \cap \cup_{r=1}^{\infty}\{\Pi_r \ge 1\} \cap \cap_{j=1}^{\infty}\{\Pi_j - \Pi_{j-1} \ge 0\} \cap \{\Pi_0 = 0\}$ удовлетворяет перечисленным требованиям. Оно имеет единичную вероятность. Для любого $\omega \in \Omega'$ траектория $\Pi_t(\omega), t \ge 0$, непрерывна справа, не убывает, обращается в ноль в точке $t = 0$, величина $\Pi_t(\omega)$ является неотрицательным целым числом. Найдется $r \in \mathbb{N}$ такое, что $\omega \in \{\Pi_r \ge 1\}$. Так как $\Pi_0(\omega) = 0$, то траектория $\Pi_t(\omega)$ не является постоянной функцией. Пусть эта траектория имеет скачок в некоторой точке $t > 0$. Величина $\Pi_t(\omega) - \Pi_{t-}(\omega)$ является натуральным числом. Найдется $n \in \mathbb{N}$ такое, что $t < n$. Так как $\omega \in \Omega_n = \cup_{m=1}^{\infty}\Omega_{n,m}^c$, то $\omega \in \Omega_{n,m}^c$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$, и, следовательно, $\max_{1\le k\le 2^m}(\Pi_{t_{n,k}}(\omega) - \Pi_{t_{n,k-1}}(\omega)) \le 1$. Найдется $1 \le k \le 2^m$ такое, что $t_{n,k-1} \le t \le t_{n,k}$. Из неравенств

$$1 \le \Pi_t(\omega) - \Pi_{t-}(\omega) \le \Pi_{t_{n,k}}(\omega) - \Pi_{t_{n,k-1}}(\omega) \le 1$$

следует, что $\Pi_t(\omega) - \Pi_{t-}(\omega) = 1$. ◀

Пусть дан произвольный стандартный пуассоновский процесс $\Pi = \{\Pi_t, t \ge 0\}$ с параметром $\lambda > 0$. Обозначим $\tau_n = \tau_n(\omega), n \in \mathbb{N}$, моменты последовательных скачков траектории $\Pi_t(\omega), t \ge 0$.

5.3.3. Теорема. *Разности $\tau_n - \tau_{n-1}, n \in \mathbb{N}$, где $\tau_0 = 0$, между моментами последовательных скачков стандартного пуассоновского процесса $\Pi = \{\Pi_t, t \ge 0\}$ с параметром $\lambda > 0$ независимы и имеют общее экспоненциальное распределение с параметром λ.*

► Утверждение является частным случаем теоремы 4.6.4. Дадим прямое доказательство этого утверждения. Обозначим $\tau_0 = 0$, $\xi_n = \tau_n - \tau_{n-1}$ для $n \in \mathbb{N}$ и заметим, что $\tau_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$. Ниже будет доказано, что совместная плотность вероятностей $q_n(t_1,\ldots,t_n)$

случайных величин $\tau_1, \dots, \tau_n$ равна $\lambda^n e^{-\lambda t_n}$, если $0 \le t_1 \le \dots \le t_n$, и равна нулю в противном случае. С помощью функции q_n можно вычислить совместную характеристическую функцию случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_n$. Пусть $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}$, $v_n = u_n$, $v_k = u_k - u_{k+1}$, $k = 1, \dots, n-1$. Несложные вычисления ведут к равенствам

$$\begin{aligned}\mathbb{E}e^{i\sum_{k=1}^n u_k\xi_k} &= Ee^{i\sum_{k=1}^n v_k\tau_k} = \\ &= \int_0^\infty \int_{t_1}^\infty \cdots \int_{t_{n-1}}^\infty e^{i\sum_{k=1}^n v_k t_k} \lambda^n e^{-\lambda t_n}\, dt_n \cdots dt_1 = \\ &= \frac{\lambda^n}{(\lambda - iu_1)\cdots(\lambda - iu_n)}.\end{aligned}$$

Если $u_k = 0$ для $k \ne r$, то получится равенство $\mathbb{E}e^{iu_r\xi_r} = \lambda/(\lambda - iu_r)$. Оно означает, что случайная величина ξ_r имеет экспоненциальное распределение с параметром λ. Случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_n$ независимы, так как их совместная характеристическая функция равна произведению их характеристических функций.

Убедимся, что функция q_n имеет указанный вид. По определению она равна производной $\frac{\partial^n}{\partial t_1 \cdots \partial t_n}\mathbb{P}\{\tau_1 \le t_1, \dots, \tau_n \le t_n\}$. Обозначим $A_k = \{\tau_k \le t_k\}, k = 1, \dots, n$, и заметим, что выполняется равенство $\mathbb{P}\{\tau_1 \le t_1, \dots, \tau_n \le t_n\} = 1 - \mathbb{P}\{\cup_{k=1}^n A_k^c\}$. По формуле включений-исключений выполняется равенство

$$\mathbb{P}\{\cup_{k=1}^n A_k^c\} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \le j_1 < \dots < j_n \le n} \mathbb{P}\{\cap_{r=1}^k A_{j_r}^c\}.$$

Если $1 \le k < n$, то функция $\mathbb{P}\{\cap_{r=1}^k A_{j_r}^c\}(t_1, \dots, t_n)$ не зависит от одной или нескольких переменных $t_1, \dots, t_n$ и, следовательно, смешанная n-производная такого слагаемого равна нулю. Поэтому

$$q(t_1, \dots, t_n) = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial t_1 \cdots \partial t_n} \mathbb{P}\{\tau_1 > t_1, \dots, \tau_n > t_n\}. \qquad (5.3.1)$$

Заметим, что производная может быть отличной от нуля только при условии, что $t_1 \le \dots \le t_n$. Например, если $t_1 > t_2$, то

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{\tau_1 > t_1, \dots, \tau_n > t_n\} &= \mathbb{P}\{\tau_1 > t_1, \tau_3 > t_3, \dots, \tau_n > t_n\} - \\ &- \mathbb{P}\{\tau_1 > t_1, \tau_2 \le t_2, \tau_3 > t_3, \dots, \tau_n > t_n\}.\end{aligned}$$

Последнее слагаемое равно нулю, так как $\tau_1 \le \tau_2$ и поэтому событие $\{\tau_1 > t_1, \tau_2 \le t_2\}$ невозможно. Первое слагаемое справа не зависит от переменной t_2. Поэтому производная (5.3.1) равна нулю. Далее предполагается, что $t_1 \le \dots \le t_n$. Так как $\tau_1, \dots, \tau_n$ являются моментами первых n скачков стандартного пуассоновского процесса, то $\mathbb{P}\{\tau_1 > t_1, \dots, \tau_n > t_n\} = \mathbb{P}\{\Pi_{t_1} < 1, \dots, \Pi_{t_n} < n\}$. Последнюю вероятность можно записать в виде суммы

$$\mathbb{P}\{\Pi_{t_1} < 1, \dots, \Pi_{t_n} < n\} = \sum \mathbb{P}\{\Pi_{t_1} = k_1, \dots, \Pi_{t_n} = k_n\},$$

где суммирование распространяется на все целые неотрицательные числа $k_1, \dots, k_n$ такие, что $k_m < m, m = 1, \dots, n$, $k_1 \le \dots \le k_n$. Возрастание чисел является следствием возрастания случайных величин $\Pi_{t_1}, \dots, \Pi_{t_n}$. Так как приращения случайного процесса независимы и имеют пуассоновские распределения, то

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\{\Pi_{t_1} = k_1, \dots, \Pi_{t_n} = k_n\} = \\
&\quad = \mathbb{P}\{\Pi_{t_1} = k_1, \Pi_{t_m} - \Pi_{t_{m-1}} = k_m - k_{m-1}, m = 2, \dots, n\} = \\
&\qquad = e^{-\lambda t_n} \frac{(\lambda t_1)^{k_1}}{k_1!} \prod_{m=2}^{n} \frac{(\lambda(t_m - t_{m-1}))^{k_m - k_{m-1}}}{(k_m - k_{m-1})!}.
\end{aligned}$$

Обозначим $f = f(t_1, \dots, t_n)$ функцию справа. Из условий $k_m < m$, $m = 1, \dots, n$, следует, что $k_1 = 0$. Если $k_1 = k_2$, то функция f не зависит от t_1 и, следовательно, производная $\frac{\partial^n}{\partial t_1 \cdots \partial t_n} f(t_1, \dots, t_n)$ равна нулю. Поэтому $0 = k_1 < k_2 = 1$. Если $k_2 = k_3$, то функция f не зависит от t_3 и, следовательно, $\frac{\partial^n}{\partial t_1 \cdots \partial t_n} f(t_1, \dots, t_n) = 0$. Поэтому $k_2 < k_3 = 2$. С помощью подобных рассуждений можно убедиться, что $k_m = m - 1$ для всех $m = 1, \dots, n$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}
q_n(t_1, \dots, t_n) &= (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial t_1 \cdots \partial t_n} P\{\Pi_{t_1} = k_1, \dots, \Pi_{t_n} = k_n\} = \\
&= (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial t_1 \cdots \partial t_n} \lambda^{n-1} e^{-\lambda t_n} \prod_{m=2}^{n} (t_m - t_{m-1}) = \lambda^n e^{-\lambda t_n}. \quad \blacktriangleleft
\end{aligned}$$

При доказательстве теоремы было отмечено, что момент n-го скачка τ_n стандартного пуассоновского процесса можно представить в виде суммы независимых случайных величин с общим экспоненциальным распределением. Это наблюдение позволяет вычислить плотность вероятностей случайной величины τ_n.

5.3.4. Теорема. *Сумма* $\tau_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ *независимых случайных величин с общим экспоненциальным распределением с па-*

раметром λ *имеет плотность вероятностей, равную* $p_n(x) = 0$ *для* $x \le 0$ *и* $p_n(x) = \lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{n-1}/(n-1)!$ *для* $x > 0$.

▶ Случайная величина ξ_1 имеет экспоненциальное распределение. Напомним, что ее плотность вероятностей равна $p_1(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ для $x \ge 0$ и $p_1(x) = 0$ для $x < 0$. Далее можно рассуждать по индукции. Предположим, что плотность вероятностей суммы $\xi_1 + \dots + \xi_n$ имеет указанный вид. Плотность вероятностей p_{n+1} суммы $\xi_1 + \dots + \xi_{n+1}$ можно вычислить по формуле свертки

$$\begin{aligned} p_{n+1}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_1(t) p_n(x-t)\, dt = \\ &= \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} \lambda e^{-\lambda(x-t)} \frac{1}{(n-1)!} (\lambda(x-t))^{n-1}\, dt = \\ &= \frac{1}{n!} \lambda e^{-\lambda x} (\lambda x)^n \text{ для } x > 0. \quad ◀ \end{aligned}$$

Интегрирование по частям дает

$$\mathbb{P}\{\xi_1 + \dots + \xi_n \le x\} = \int_0^x p_n(t)\, dt = 1 - e^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!}, x \ge 0.$$

Одно интересное утверждение из доказательства теоремы 5.3.3 полезно сформулировать в виде отдельного замечания в терминах экспоненциально распределенных случайных величин.

5.3.5. Замечание. *Пусть независимые случайные величины* $\xi_1, \dots, \xi_n$ *имеют общее экспоненциальное распределение с параметром* λ. *Тогда совместная плотность вероятностей случайных величин* $\tau_k = \xi_1 + \dots + \xi_k, k = 1, \dots, n$, *равна* $q_n(x_1, \dots, x_n) = \lambda^n e^{-\lambda x_n}$, *если* $0 \le x_1 \le \dots \le x_n$, *и нулю в противном случае.*

▶ При доказательстве теоремы 5.3.3 было доказано, что момент n-го скачка стандартного пуассоновского процесса можно представить в виде суммы $\tau_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ независимых случайных величин с общим экспоненциальным распределением с параметром $\lambda > 0$. Было доказано, что искомая плотность вероятностей q_n имеет указанный вид. Вот еще одно доказательство этого утверждения, несвязанное с пуассоновским процессом.

Совместная плотность вероятностей независимых случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_n$ равна $p(x_1, \dots, x_n) = \lambda^n \exp\{-\lambda(x_1 + \dots + x_n)\}$ для $x_k \in \mathbb{R}_+, k = 1, \dots, n$, и нулю в противном случае. Совместная плотность вероятностей случайных величин $\tau_1, \dots, \tau_n$ вычисляется по известному из курса теории вероятностей правилу $q_n(y_1, \dots, y_n) = p(y_1, y_2 - y_1, \dots, y_n - y_{n-1})|J(y_1, \dots, y_n)|$ с помощью замены переменных $y_k = x_1 + \dots + x_k, k = 1, \dots, n$. Якобиан $J(y_1, \dots, y_n)$ преобразования переменных $x_1 = y_1, x_k = y_k - y_{k-1}, k = 2, \dots, n$, как нетрудно убедиться, равен единице. Поэтому функция q_n имеет указанный вид $q_n(y_1, \dots, y_n) = \lambda^n \exp\{-\lambda y_n\}$, если $0 \le y_1 \le \dots \le y_n$. В противном случае $q_n(y_1, \dots, y_n) = 0$. ◀

5.4. Другая модель пуассоновского процесса

Имеется еще одна популярная в учебной литературе модель пуассоновского процесса, которая подчеркивает глубокую связь между пуассоновским процессом и экспоненциальным распределением. Считается, что все рассматриваемые случайные величины определены на данном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

5.4.1. Теорема. *Пусть даны независимые случайные величины* ξ_n, $n \in \mathbb{N}$, *с общей экспоненциальной плотностью вероятностей* $p(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0, \lambda > 0$. *Обозначим* $\tau_0 = 0, \tau_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$, $\Pi = \{\Pi_t, t \ge 0\}$, $\Pi_t = \sup\{n \ge 0\colon \tau_n \le t\}$. *Тогда* $\Pi = \{\Pi_t, t \ge 0\}$ *является пуассоновским процессом с параметром* λ.

▶ Из определения Π_t и из теоремы 5.3.4 следует, что

$$\mathbb{P}\{\Pi_0 = 0\} = 1, \mathbb{P}\{\Pi_t = k\} = \mathbb{P}\{\tau_{k+1} > t\} - \mathbb{P}\{\tau_k > t\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

для любых $t \ge 0$ и $k = 0, k \in \mathbb{N}$. По теореме 5.2.1 достаточно доказать равенство (5.2.1) для любых чисел $n \in \mathbb{N}, 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ и для любых целых неотрицательных чисел $0 = k_0 \le k_1 \le \dots \le k_n$. Если $k_1 = \dots = k_n = 0$, то требуемое равенство (5.2.1) является следствием равенств $\mathbb{P}\{\Pi_{t_j} = k_j, j = 1, \dots, n\} = \mathbb{P}\{\Pi_{t_n} = 0\} = e^{-\lambda t_n}$.

Нам понадобится легко проверяемое равенство

$$J_{s,t}^{(k)} = \int \cdots \int_{s < u_1 \le \dots \le u_k \le t} du_1 \cdots du_k = \frac{(t-s)^k}{k!} \tag{5.4.1}$$

для любых чисел $k \in \mathbb{N}, s, t, 0 \le s < t$.

В замечании 5.3.5 доказано, что совместная плотность вероятностей случайных величин $\tau_1, \dots, \tau_n$ равна $q_n(u_1, \dots, u_n) = \lambda^n e^{-\lambda u_n}$, если $0 \le u_1 \le \dots \le u_n$, и $q_n(u_1, \dots, u_n) = 0$ в противном случае.

Если $k_1 = \cdots = k_n = k \geq 1$, то (5.2.1) следует из (5.4.1):

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{\Pi_{t_j} = k_j, j = 1, \ldots, n\} &= \mathbb{P}\{\tau_k \leq t_1, t_n < \tau_{k+1}\} = \\
&= \int\limits_{0 \leq u_1 \leq \cdots \leq u_k \leq t_1} \cdots \int \left(\int_{t_n}^{\infty} \lambda^{k+1} e^{-\lambda u_{k+1}} du_{k+1} \right) du_1 \cdots du_k = \\
&= \lambda^k e^{-\lambda t_n} J_{0,t_1}^{(k)} = e^{-\lambda t_n} \prod_{j=1}^{n} \frac{(\lambda(t_j - t_{j-1}))^{k_j - k_{j-1}}}{(k_j - k_{j-1})!}.
\end{aligned}$$

Нам осталось доказать равенство (5.2.1) для $n \geq 2, k_1 < k_n$. Разобьем числа $k_1, \ldots, k_n$ на несколько групп, равных между собой в каждой группе. Группа может, в частности, состоять из одного числа. Пусть $0 = r_0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_m = n, m \geq 2$, такие, что $k_{r_j+1} = \cdots = k_{r_{j+1}}$, $j = 0, 1, \ldots, m-1$. Обозначим $l_j = k_{r_j}$. Числа $l_j, j = 1, \ldots, m$, строго возрастают. Возможны два случая: $l_1 = k_{r_1} = 0$ и $l_1 = k_{r_1} \geq 1$. Если $l_1 = k_{r_1} = 0$, то

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\{\Pi_{t_j} = k_j, j = 1, \ldots, n\} = \mathbb{P}\{\tau_{k_j} \leq t_j < \tau_{k_j+1}, j = 1, \ldots, n\} = \\
&= \mathbb{P}\left\{ t_{r_1} < \tau_1, \tau_{l_{j+1}} \leq t_{r_j+1}, t_{r_{j+1}} < \tau_{l_{j+1}+1}, j = 1, \ldots, m-1 \right\} = \\
&= \int\limits_{\substack{t_{r_1} < u_1 \leq \cdots \leq u_{l_m} \leq t_{r_{m-1}+1}, \\ u_{l_{j+1}} \leq t_{r_j+1}, t_{r_{j+1}} < u_{l_{j+1}+1}, \\ j=1,\ldots,m-1}} \cdots \int q(u_1, \ldots, u_{l_m+1})\, du_1 \cdots du_{l_m+1} = \\
&= \int\limits_{\substack{t_{r_1} < u_1 \leq \cdots \leq u_{l_m} \leq t_{r_{m-1}+1}, \\ u_{l_{j+1}} \leq t_{r_j+1}, t_{r_{j+1}} < u_{l_{j+1}+1}, \\ j=1,\ldots,m-2}} \cdots \int \left(\int_{t_{r_m}}^{\infty} \lambda^{l_m+1} e^{-\lambda u_{l_m+1}} du_{l_m+1} \right) du_1 \cdots du_{l_m} = \\
&= \lambda^{l_m} e^{-\lambda t_{r_m}} \prod_{j=1}^{m-1} J_{t_{r_j}, t_{r_{j+1}}}^{(l_{j+1} - l_j)} = e^{-\lambda t_n} \prod_{j=1}^{m-1} \frac{(\lambda(t_{r_{i+1}} - t_{r_j}))^{l_{j+1} - l_j}}{(l_{j+1} - l_j)!} = \\
&= e^{-\lambda t_n} \prod_{j=1}^{n} \frac{(\lambda(t_j - t_{j-1}))^{k_j - k_{j-1}}}{(k_j - k_{j-1})!}.
\end{aligned}$$

Вычисление многократного интеграла сводится к последовательному применению равенства (5.4.1). Вычисления для случая $l_1 \geq 1$

аналогичны. Напомним, что $l_0 = k_{r_0} = k_0 = 0$. Мы имеем

$$\mathbb{P}\{\Pi_{t_j} = k_j, j = 1, \ldots, n\} = \mathbb{P}\{\tau_{k_j} \le t_j < \tau_{k_j+1}, j = 1, \ldots, n\} =$$
$$= \mathbb{P}\left\{\tau_{l_{j+1}} \le t_{r_j+1}, t_{r_{j+1}} < \tau_{l_{j+1}+1}, j = 0, 1, \ldots, m-1\right\} =$$
$$= \underset{\substack{0 \le u_1 \le \cdots \le u_{l_m} \le t_{r_{m-1}+1},\\ u_{l_{j+1}} \le t_{r_j+1}, t_{r_{j+1}} < u_{l_{j+1}+1},\\ j=0,\ldots,m-1}}{\int \cdots \int} q(u_1, \ldots, u_{l_m+1})\, du_1 \cdots du_{l_m+1} =$$
$$= \lambda^{l_m} e^{-\lambda t_{r_m}} J_{0,t_1}^{(l_1)} \prod_{j=1}^{m-1} J_{t_{r_j}, t_{r_{j+1}}}^{(l_{j+1}-l_j)} = e^{-\lambda t_n} \prod_{j=1}^{n} \frac{(\lambda(t_j - t_{j-1}))^{k_j - k_{j-1}}}{(k_j - k_{j-1})!}. \quad ◀$$

Насколько важно предположение об экспоненциальной распределенности случайных величин $\xi_n, n \in \mathbb{N}$, в теореме 5.4.1? В следующей теореме, принадлежащей Набею (Seiji Nabeya), доказано, что в этой конструкции пуассоновского процесса можно брать только экспоненциально распределенные случайные величины.

5.4.2. Теорема. *Пусть даны независимые, одинаково распределенные, положительные случайные величины* ξ_n, $n \in \mathbb{N}$. *Обозначим* $\Pi_t = \sup\{n \ge 0 \colon \tau_n \le t\}, \tau_0 = 0, \tau_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$. *Если для любого* $t > 0$ *случайная величина* Π_t *имеет пуассоновское распределение, то* F *– экспоненциальная функция распределения.*

► Требуется доказать, что $F(t) = \mathbb{P}\{\xi_1 \le t\} = 1 - e^{-\lambda t}$ для всех $t \ge 0$ и некоторого $\lambda > 0$. Случайная величина Π_t имеет пуассоновское распределение с некоторым параметром $\lambda(t)$. Из равенств

$$e^{-\lambda(t)} = \mathbb{P}\{\Pi_t = 0\} = \mathbb{P}\{\tau_1 > t\} = \mathbb{P}\{\xi_1 > t\}$$

следует, что $F(t) = 1 - e^{-\lambda(t)}$, $\lambda(0) = 0$, $\lim_{t\to\infty} \lambda(t) = \infty$, а также то, что функция $\lambda(t), t \ge 0$, не убывает. Преобразование Лапласа

$$\phi(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, dF(t), s \in [0, \infty),$$

однозначно определяет функцию F. С помощью интегрирования по частям функцию ϕ можно записать в следующем виде

$$\phi(s) = 1 - s\int_0^\infty e^{-st}(1 - F(t))\, dt = 1 - s\int_0^\infty e^{-st-\lambda(t)}\, dt.$$

Для произвольного фиксированного $s > 0$ неотрицательная функция $p_s(t) = se^{-st-\lambda(t)}/(1 - \phi(s)), t \ge 0$, интегрируема, и ее интеграл по полупрямой $[0, \infty)$ равен единице. Поэтому она является плотностью вероятностей некоторой неотрицательной случайной величины. Преобразование Лапласа суммы $\tau_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ равно ϕ^n произведению преобразований Лапласа слагаемых.

Для любых $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $t \geq 0$ выполняются равенства

$$\frac{\lambda^n(t)}{n!}e^{-\lambda(t)} = \mathbb{P}\{\Pi_t = n\} = \mathbb{P}\{\tau_{n+1} > t\} - \mathbb{P}\{\tau_n > t\}.$$

Умножим все члены этих равенств на e^{-st}, $s > 0$, и проинтегрируем по $t \geq 0$. С помощью интегрирования по частям мы получим

$$\int_0^\infty e^{-st-\lambda(t)}\frac{\lambda^n(t)}{n!}\,dt = \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}(\mathbb{P}\{\tau_{n+1} > t\} - \mathbb{P}\{\tau_n > t\})\,dt = \\ = \frac{1}{s}(\phi^n(s) - \phi^{n+1}(s)),\ s > 0.$$

Умножим все члены этих равенств на $(iz)^n$, где $i = \sqrt{-1}$ и $z \in \mathbb{R}$, и просуммируем по $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Это приведет к равенствам

$$\int_0^\infty e^{-st-\lambda(t)+iz\lambda(t)}\,dt = \int_0^\infty e^{-st-\lambda(t)}\sum_{n=0}^\infty \frac{(iz\lambda(t))^n}{n!}\,dt = \\ = \frac{1}{s}\sum_{n=0}^\infty (iz)^n(\phi^n(s) - \phi^{n+1}(s)) = \frac{1-\phi(s)}{s(1-iz\phi(s))},$$

и, следовательно,

$$\int_0^\infty p_s(t)e^{iz\lambda(t)}\,dt = \int_0^\infty e^{-st-\lambda(t)+iz\lambda(t)}\frac{s}{1-\phi(s)}\,dt = \frac{1}{1-iz\phi(s)}.$$

Это равенство выполняется для всех $z \in \mathbb{R}$. Выше упоминалось, что p_s является плотностью вероятностей некоторой неотрицательной случайной величины ξ. Справа стоит характеристическая функция случайной величины τ с экспоненциальным распределением с параметром $1/\phi(s)$. По теореме единственности случайные величины $\lambda(\xi)$ и τ имеют общее экспоненциальное распределение с плотностью вероятностей $\exp\{-t/\phi(s)\}/\phi(s), t \geq 0$. Поэтому для любых a и $b, 0 \leq a \leq b$, выполняются равенства

$$\int_{\lambda(a)}^{\lambda(b)}(e^{-t/\phi(s)}/\phi(s))\,dt = \mathbb{P}\{\lambda(a) \leq \lambda(\xi) \leq \lambda(b)\} = \int_a^b p_s(t)\,dt.$$

Отсюда следует, что функция $\lambda(t), t \geq 0$, строго возрастает и непрерывна. Действительно, если $\lambda(a) = \lambda(b)$ для некоторых $0 \leq a < b$, то, справа стоит положительная величина, а слева стоит ноль. Если в некоторой точке $c > 0$ функция λ имеет разрыв, то полагая $a \uparrow c$ и $b \downarrow c$, мы снова придем к невозможному равенству. По теореме о среднем найдется число $\theta \in [\lambda(a), \lambda(b)]$ такое, что

$$\frac{\lambda(b) - \lambda(a)}{b - a} e^{-\theta/\phi(s)} / \phi(s) = \frac{1}{b - a} \int_a^b p_s(t)\, dt.$$

Полагая $b \to a$, мы найдем, что

$$\lambda'(a) e^{-\lambda(a)/\phi(s)} / \phi(s) = p_s(a) = \frac{s}{1 - \phi(s)} e^{-sa - \lambda(a)}.$$

Отсюда следует, что

$$(e^{-\lambda(a)(1/\phi(s) - 1)})' = -\lambda'(a)(1/\phi(s) - 1) e^{-\lambda(a)(1/\phi(s) - 1)} = -s e^{-sa}.$$

Интегрирование по переменной $a \in [0, t]$ приводит к следующему равенству $\lambda(t) = s\phi(s)t/(1 - \phi(s))$. Оно означает, что все случайные величины $\xi_n, n \in \mathbb{N}$, имеют общее экспоненциальное распределение с параметром $s\phi(s)/(1 - \phi(s))$. ◄

5.5. Считающий пуассоновский процесс

Пуассоновский процесс является примером считающего процесса. Он является единственным случайным процессом в классе считающих процессов Леви. Предполагается, что все случайные процессы, о которых пойдет речь, определены на полном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Понятия согласованности и марковского момента определяются относительно непрерывной справа, расширенной фильтрации $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t \colon \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}, t \geq 0\}$.

5.5.1. Определение. Пусть дана неограниченно строго возрастающая последовательность $\{\tau_n\}_{n \geq 1}$ положительных случайных величин. Случайный процесс $\{N_t, t \geq 0\}, N_t = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{\tau_n \leq t\}}$, называется *считающим.*

Случайные величины $\tau_n, n \in \mathbb{N}$, можно интерпретировать как моменты наступления некоторых событий. Тогда τ_n и N_t обозначают момент поступления n-го события и число событий, поступивших до момента t включительно.

5.5.2. Теорема. *Считающий процесс $\{N_t, t \geq 0\}$ согласован с фильтрацией $\mathbb{F}$ тогда и только тогда, когда случайные величины $\tau_n, n \in \mathbb{N}$, являются $\mathbb{F}$-марковскими моментами.*

▶ Утверждение является следствием легко проверяемого равенства $\{\tau_n \leq t\} = \{N_t \geq n\}$ для любых $n \in \mathbb{N}$ и $t \in \mathbb{R}_+$. ◀

5.5.3. Теорема. *Любой считающий $\mathbb{F}$-процесс Леви является стандартным пуассоновским процессом.*

▶ Считающий процесс $\{N_t, t \geq 0\}$ определяется некоторой строго возрастающей последовательностью $\{\tau_n\}_{n\geq 1}, \tau_n \uparrow \infty$, неотрицательных случайных величин. Обозначим $\tau_0 = 0$. Из определения 5.5.1 следует, что $N_t = \max\{n \geq 0\colon \tau_n \leq t\}$, $0 \leq N_t - N_{t-} \leq 1$, $N_0 = 0$. В теореме 5.5.2 доказано, что случайные величины $\tau_n, n \in \mathbb{N}$, являются $\mathbb{F}$-марковскими моментами. Они связаны соотношениями $\tau_1 = \inf\{t > 0\colon N_t > 1\}, \tau_{n+1} = \{t > 0\colon t > \tau_n, N_t - N_{\tau_n} > 1\}$, $n \in \mathbb{N}$. По теореме 4.6.4 случайные величины $\tau_1, \tau_{n+1} - \tau_n, n \in \mathbb{N}$, независимы и имеют общее распределение. Ниже будет доказано, что τ_1 имеет экспоненциальное распределение. По теореме 5.4.1 случайный процесс N является пуассоновским процессом. Будучи $\mathbb{F}$-процессом Леви, он является стандартным пуассоновским процессом.

Докажем, что τ_1 имеет экспоненциальное распределение с некоторым параметром $\lambda > 0$. Для любых $s, t, 0 \leq s < t$, случайные величины N_s и $N_t - N_s$ независимы. Так как $N_s \geq 0$, $N_t - N_s \geq 0$, $N_t = N_s + (N_t - N_s)$, то $\mathbb{P}\{N_t = 0\} = \mathbb{P}\{N_s = 0\}\mathbb{P}\{N_t - N_s = 0\}$. Функция $\lambda(t) = \mathbb{P}\{N_t = 0\}$, $t \in \mathbb{R}_+$, не возрастает и непрерывна справа. В силу однородности случайного процесса N выполняется равенство $\mathbb{P}\{N_t - N_s = 0\} = \mathbb{P}\{N_{t-s} = 0\}$, и, следовательно, $\lambda(t+s) = \lambda(t)\lambda(s)$ для любых $s, t \in \mathbb{R}_+$. Если функция λ обращается в ноль в некоторой точке, то она тождественно равна нулю. Поэтому $\mathbb{P}\{N_t - N_s \geq 1\} = 1$ для любых $s, t, s < t$, и, следовательно, $N_t = \sum_{k=1}^n (N_{t_k} - N_{t_{k-1}}) \geq n$ п.в. для любых $0 = t_0 < \cdots < t_n \uparrow t$. Полагая $n \to \infty$, мы видим, что $N_t = \infty$ п.в. для любого $t > 0$. Это вступает в противоречие с определением считающего процесса. Далее предполагается, что $\lambda(t) > 0$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$. Обозначим $\lambda = -\ln \lambda(1)$. Для любых $k, n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства $\lambda(1) = \lambda^n(1/n)$ и $\lambda(k/n) = \lambda^k(1/n)$, из которых следует, что $\lambda(k/n) = e^{-\lambda k/n}$. Для любого $t \geq 0$ найдется убывающая последовательность $\{k_n/n\}_{n\geq 1}$, сходящаяся к t. Полагая $n \to \infty$ в равенстве $\lambda(k_n/n) = e^{-\lambda k_n/n}$, мы получим $\mathbb{P}\{N_t = 0\} = \lambda(t) = e^{-\lambda t}$. Выше уже отмечалось равенство $\{\tau_1 > t\} = \{N_t = 0\}$. Из него следует, что $\mathbb{P}\{\tau_1 \leq t\} = 1 - \mathbb{P}\{N_t = 0\} = 1 - e^{-\lambda t}$. Число λ строго положительно. Если $\lambda = 0$, то $\mathbb{P}\{\tau_1 > t\} = \mathbb{P}\{N_t = 0\} = 1$ для всех $t \geq 0$. Отсюда следует невозможное равенство $\tau_1 = \infty$ п.в. ◀

5.5.4. Замечание. Теорема 5.5.3 имеет многочисленные применения в теории массового обслуживания. В терминах потоков событий и при некоторых дополнительных предположениях она была доказана Александром Яковлевичем Хинчиным.

Стандартный пуассоновский процесс является процессом Леви относительно своей естественной фильтрации. По теореме 5.5.2 его моменты скачков являются марковскими моментами. В следующей теореме утверждается, что моменты скачков не могут быть предсказуемыми марковскими моментами.

5.5.5. Теорема. *Пусть стандартный пуассоновский процесс* $\Pi = \{\Pi_t, t \geq 0\}$ *с параметром* $\lambda > 0$ *является процессом Леви относительно некоторой фильтрации* $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t \colon \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}, t \geq 0\}$. *Тогда все моменты скачков случайного процесса* Π *не являются предсказуемыми* $\mathbb{F}$*-марковскими моментами.*

▶ Обозначим $\tau_n, n \in \mathbb{N}$, последовательные моменты скачков данного пуассоновского процесса Π. В силу следствия 4.6.3 функция τ_{n+1} является моментом первого скачка стандартного пуассоновского процесса $\{\Pi_{\tau_n+t} - \Pi_{\tau_n}, t \geq 0\}$. Поэтому достаточно доказать, что момент τ_1 первого скачка пуассоновского процесса Π не является предсказуемым. Предположим противное, что τ_1 является предсказуемым $\mathbb{F}$-марковским моментом. По теореме 5.3.3 случайная величина τ_1 имеет экспоненциальное распределение с параметром λ и математическим ожиданием $\mathbb{E}\tau_1 = 1/\lambda$. Возьмем какую-нибудь предвещающую последовательность $\{\sigma_n\}_{n\geq 1}$ для τ_1. В силу неравенств $0 \leq \sigma_n \leq \tau_1$ можно применить теорему об ограниченной сходимости, по которой $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\sigma_n = \mathbb{E}\tau_1 = 1/\lambda$. По следствию 4.6.3 случайный процесс $\{\Pi_{\sigma_n+t} - \Pi_{\sigma_n}, t \geq 0\}$ является стандартным пуассоновским процессом с параметром λ. Момент σ первого скачка этого случайного процесса равен $\sigma = \tau_1 - \sigma_n$. Отсюда следует противоречивое утверждение

$$1/\lambda = \mathbb{E}\sigma = \mathbb{E}\tau_1 - \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\sigma_n = 1/\lambda - 1/\lambda = 0. \quad ◀$$

Глава 6
Процесс броуновского движения

Процесс броуновского движения служит математической моделью хаотического движения мелких частиц в жидкости. Явление хаотического движения было открыто в 1670 году создателем теории микроскопии и изобретателем микроскопа Левенгуком (Antoni van Leeuwenhook). Через сто пятьдесят семь лет в 1827 году это явление вновь открыл и основательно изучил английский ботаник Броун (Robert Brown). В последствии хаотическое движение, открытое Левенгуком и Броуном, получило название броуновского движения. Первая математическая модель процесса броуновского движения была построена Башелье (Louis Bachelier) в 1900 году для описания динамики ценных бумаг (облигаций). Другая модель была предложена Эйнштейном (Albert Einstein) и Смолуховским (Marian Smoluchowski) в 1905 году для объяснений некоторых явлений диффузии. Строгая математическая теория процесса броуновского движения была предложена Винером (Norbert Wiener) в 1923 году.

6.1. Модель броуновского движения

Имеется большое число конструкций процесса броуновского движения. Здесь будет изложена конструкция Леви (Paul Lévy). Предполагается, что все рассматриваемые ниже случайные величины определены на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

6.1.1. Определение. Непрерывный вещественный случайный процесс $B = \{B_t, t \in T\}$, где $T = [a, b]$ или $T = [a, \infty), a, b \in \mathbb{R}$, называется *процессом броуновского движения,* если: (i) $B_a = 0$;
(ii) для любых $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n, n \geq 2$, из T случайные величины $B_{t_k} - B_{t_{k-1}}, k = 1, \ldots, n$, независимы;
(iii) для любых $s, t \in T, s < t$, разность $B_t - B_s$ имеет нормальное

распределение

$$\mathbb{P}\{B_t - B_s \in A\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_A e^{-u^2/(2(t-s))} du, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

6.1.2. Теорема. *Процесс броуновского движения существует.*

► Сначала будет построен процесс броуновского движения B с параметрическим множеством $T = [0,1]$. С помощью замены переменной $u = (t-a)/(b-a)$ можно построить процесс броуновского движения $(b-a)^{-1/2} B_{(t-a)/(b-a)}$ с множеством $T = [a,b]$.

По следствию 3.1.4 можно считать, что существуют независимые случайные величины X_k, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, с общей стандартной нормальной функцией распределения. По теореме 2.4.7 вероятность события $\Omega' = \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} \{|X_k| \le 2\sqrt{\ln k}\}$ равна единице. Для любого $\omega \in \Omega'$ найдется $n_0 = n_0(\omega)$ такое, что $|X_n(\omega)| \le 2\sqrt{\ln n}$ для всех $n > n_0$. По теореме 2.2.7 ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} X_n(\omega) \int_0^t H_n(u)\, du, t \in [0,1], \tag{6.1.1}$$

сходится равномерно по $t \in [0,1]$. Определим случайный процесс $B = \{B_t, t \in [0,1]\}$, положим $B_t(\omega)$ равным сумме ряда (6.1.1), если $\omega \in \Omega'$, и $B_t(\omega) = 0$, если $\omega \notin \Omega'$. Докажем, что он является процессом броуновского движения. Заметим, что все его траектории непрерывны и обращаются в ноль при $t = 0$.

Проверим, что он удовлетворяет двум другим условиям из определения 6.1.1. Пусть $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n \le 1, n \ge 2$. Вычислим совместную характеристическую функцию

$$\phi_{t_1,\ldots,t_n}(u_1,\ldots,u_n) = \mathbb{E} e^{i\sum_{k=1}^n u_k(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})}, \tag{6.1.2}$$

случайных величин $B_{t_k} - B_{t_{k-1}}, k = 1,\ldots,n$, для любых $u_1,\ldots,u_n \in \mathbb{R}$.

Обозначим $S_m(t) = \int_0^t H_m(u)\,du$ и заметим, что

$$\begin{aligned}\phi_{t_1,\dots,t_n}(u_1,\dots,u_n) &= \mathbb{E}\exp\big\{i\sum_{k=1}^n u_k \sum_{m=0}^\infty (S_m(t_k) - S_m(t_{k-1}))X_m\big\} = \\ &= \mathbb{E}\exp\big\{i\sum_{m=0}^\infty \sum_{k=1}^n u_k (S_m(t_k) - S_m(t_{k-1}))X_m\big\} = \\ &= \prod_{m=0}^\infty \mathbb{E}\exp\big\{i \sum_{k=1}^n u_k (S_m(t_k) - S_m(t_{k-1}))X_m\big\} = \\ &= \prod_{m=0}^\infty \exp\big\{-\frac{1}{2}\big(\sum_{k=1}^n u_k (S_m(t_k) - S_m(t_{k-1}))\big)^2\big\} = \\ &= \exp\big\{-\frac{1}{2}\sum_{m=0}^\infty \big(\sum_{k=1}^n u_k (S_m(t_k) - S_m(t_{k-1}))\big)^2\big\}.\end{aligned}$$

Здесь было принято во внимание, что случайные величины X_m, $m \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, независимы и то, что характеристическая функция случайной величины X_m равна $\mathbb{E}\exp\{iuX_m\} = \exp\{-u^2/2\}$, $u \in \mathbb{R}$. Запишем сумму в экспоненте в следующем виде

$$\sum_{m=0}^\infty \big(\sum_{k=1}^n u_k (S_m(t_k) - S_m(t_{k-1}))\big)^2 = \sum_{k=1}^n u_k^2 \sum_{m=0}^\infty (S_m(t_k) - S_m(t_{k-1}))^2 + \\ + 2\sum_{1\le k<r\le n} u_k u_r \sum_{m=0}^\infty (S_m(t_k) - S_m(t_{k-1}))(S_m(t_r) - S_m(t_{r-1})).$$

Обозначим J_k индикаторную функцию множества $[t_{k-1}, t_k]$. Заметим, что $(S_m(t_k) - S_m(t_{k-1}))^2 = \langle J_k, H_m\rangle^2$. С помощью равенства Парсеваля (2.2.4) и формулы для скалярного произведения (2.2.5), применительно к функциям Хаара, можно убедиться, что

$$\sum_{m=0}^\infty (S_m(t_k) - S_m(t_{k-1}))^2 = \sum_{m=0}^\infty \langle J_k, H_m\rangle^2 = \langle J_k, J_k\rangle = t_k - t_{k-1}.$$

Аналогично, если $k \ne r$, то

$$\sum_{m=0}^\infty (S_m(t_k) - S_m(t_{k-1}))(S_m(t_r) - S_m(t_{r-1})) = \\ = \sum_{m=0}^\infty \langle J_k, H_m\rangle\langle J_r, H_m\rangle = \langle J_k, J_r\rangle = 0.$$

Отсюда, в силу (6.1.2), следует, что

$$\phi_{t_1,\dots,t_n}(u_1,\dots,u_n) = \prod_{k=1}^{n} \exp\Big\{ -\frac{u_k^2}{2}(t_k - t_{k-1})\Big\}. \qquad (6.1.3)$$

При $u_k = 0$, $k \neq r$, это равенство принимает следующий вид

$$\mathbb{E}\exp\Big\{iu_r(B_{t_r} - B_{t_{r-1}})\Big\} = \exp\Big\{ -\frac{u_r^2}{2}(t_r - t_{r-1})\Big\}. \qquad (6.1.4)$$

Отсюда следует, что при $t_r = s$ и $t_{r+1} = t$, приращение $B_t - B_s$ имеет нормальное распределение с параметрами $\mathbb{E}(B_t - B_s) = 0$ и $\mathbb{E}|B_t - B_s|^2 = t - s$. Равенство (6.1.4) позволяет прочитать равенство (6.1.3) следующим образом. Совместная характеристическая функция случайных величин $B_{t_k} - B_{t_{k-1}}, k = 1,\dots,n$, может быть записана в виде произведения характеристических функций этих случайных величин. По теореме 2.1.12 случайные величины $B_{t_k} - B_{t_{k-1}}, k = 1,\dots,n$, независимы.

Построим процесс броуновского движения с параметрическим множеством $T = [a,\infty)$. По следствию 3.1.4 можно считать, что существуют независимые случайные величины $X_{n,k}, n \in \mathbb{N}, k \in \{0\}\cup\mathbb{N}$, с общей стандартной нормальной функцией распределения. С помощью случайных величин $X_{n,k}, k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, можно построить процесс броуновского движения $B^{(n)} = \{B_t^{(n)}, t \in [a+n-1, a+n]\}$. Определим случайный процесс $B = \{B_t, t \geq a\}$, положив

$$B_t = \begin{cases} B_t^{(1)}, t \in [a, a+1], \\ \sum_{k=1}^{n-1} B_{a+k}^{(k)} + B_t^{(n)}, t \in [a+n-1, a+n], n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

По аналогии с доказательством теоремы 5.1.2 о пуассоновском процессе можно убедиться, что построенный выше случайный процесс является процессом броуновского движения. ◀

В теории случайных процессов и ее приложениях встречается линейная комбинация $\mu t + \sigma B_t, t \in T$, с вещественными коэффициентами. Этот случайный процесс получил специальное название.

6.1.3. Определение. Пусть дан процесс броуновского движения $B = \{B_t, t \in T\}$ с параметрическим множеством $T = [a,b]$ или $T = [a,\infty), a, b \in \mathbb{R}$. Случайный процесс $\{\mu t + \sigma B_t, t \in T\}$ называется процессом броуновского движения *с коэффициентом сноса* $\mu \in \mathbb{R}$ *и коэффициентом диффузии* $\sigma^2, \sigma > 0$.

Процесс броуновского движения может быть представлен многими способами. Некоторые из них вместе с доказательствами перечислены в следующей теореме.

6.1.4. Теорема. *Пусть дан процесс броуновского движения* $B = \{B_t, t \geq 0\}$. *Тогда каждый из следующих четырех случайных процессов является процессом броуновского движения*:
(i) $\{-B_t, t \geq 0\}$; (ii) $\{B_{a+t} - B_a, t \geq 0\}$ *для любого* $a > 0$;
(iii) $\{\sqrt{c}B_{t/c}, t \geq 0\}$ *для любого* $c > 0$; (iv) $\{tB_{1/t}, t \geq 0\}$, *где* $tB_{1/t} = 0$ *при* $t = 0$ *полагают по определению.*

► Утверждения (i) – (iii) очевидны. Докажем утверждение (iv). Сначала убедимся, что конечномерные распределения случайного процесса $\{tB_{1/t}, t \geq 0\}$ являются многомерными нормальными распределениями. По замечанию 2.4.5 достаточно доказать, что для любых $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_d$ и $u_1, \ldots, u_d \in \mathbb{R}$ линейная комбинация $\xi = u_1 t_1 B_{1/t_1} + \cdots + u_d t_d B_{1/t_d}$ имеет одномерное нормальное распределение. Действительно, случайная величина ξ имеет нормальное распределение, так как она является линейной комбинацией $(\sum_{j=1}^{d} u_j t_j) B_{1/t_d} + \sum_{k=2}^{d} (\sum_{j=1}^{k-1} u_j t_j)(B_{1/t_{k-1}} - B_{1/t_k})$ независимых нормально распределенных случайных величин с вещественными коэффициентами. Далее, многомерное нормальное распределение однозначно определяется математическим ожиданием и ковариационной матрицей. В рассматриваемом случае $\mathbb{E}(tB_{1/t}) = 0$ для любого $t \geq 0$ и $\mathbb{E}(sB_{1/s} tB_{1/t}) = s \wedge t$ для любых $s, t \geq 0$. Именно такие математическое ожидание и ковариационную матрицу имеет процесс броуновского движения. Тем самым доказано, что случайный процесс $\{tB_{1/t}, t \geq 0\}$ и процесс броуновского движения имеют одинаковые конечномерные распределения. Наконец, заметим, что траектории случайного процесса $\{tB_{1/t}, t \geq 0\}$ непрерывны. ◄

6.2. Конечномерные распределения

Здесь будут вычислены конечномерные распределения процесса броуновского движения, параметрическим множеством которого является положительная полупрямая. Все сказанное без труда можно перенести на процессы броуновского движения с другими параметрическими множествами. Пусть процесс броуновского движения $B = \{B_t, t \geq 0\}$ определен на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Вычислим совместную характеристическую функцию

$$f_{t_1,\dots,t_n}(u_1,\dots,u_n) = \mathbb{E}e^{i\sum_{k=1}^n u_k B_{t_k}} \tag{6.2.1}$$

случайных величин $B_{t_1},\dots,B_{t_n}$ для любых чисел $u_1,\dots,u_n \in \mathbb{R}$ и $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \infty$. В силу (6.1.3) справедливы равенства

$$f_{t_1,\dots,t_n}(u_1,\dots,u_n) = \mathbb{E}e^{i\sum_{k=1}^n \sum_{r=k}^n u_r(B_{t_k}-B_{t_{k-1}})} = \\ = e^{-2^{-1}\sum_{k=1}^n (\sum_{r=k}^n u_r)^2 (t_k - t_{k-1})}.$$

Обозначим $v_k = u_k + \cdots + u_n$ для $k = 1,\dots,n$. Перепишем равенство $\mathbb{E}\exp\{iv_k(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})\} = \exp\{-v_k^2(t_k - t_{k-1})/2\}$ в следующем виде

$$e^{-v_k^2(t_k-t_{k-1})/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_k - t_{k-1})}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iv_k x_k - x_k^2/2(t_k - t_{k-1})}\, dx_k.$$

В результате получится новое представление функции (6.2.1)

$$f_{t_1,\dots,t_n}(u_1,\dots,u_n)=\prod_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_k - t_{k-1})}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iv_k x_k - x_k^2/2(t_k - t_{k-1})}\, dx_k =$$

$$= \prod_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_k - t_{k-1})}} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sum_{k=1}^n [iv_k x_k - x_k^2/2(t_k - t_{k-1})]}\, dx_1 \cdots dx_n.$$

Замена переменных $x_1 = y_1, x_k = y_k - y_{k-1}$, $y_0 = 0$, $k = 1,\dots,n$, приводит к следующему равенству

$$f_{t_1,\dots,t_n}(u_1,\dots,u_n) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_k - t_{k-1})}} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sum_{k=1}^n [iu_k y_k - (y_k - y_{k-1})^2/2(t_k - t_{k-1})]}\, dy_1 \cdots dy_n.$$

Из этой записи следует, что случайные величины $B_{t_1},\dots,B_{t_n}$ имеют совместную плотность вероятностей

$$p_{t_1,\dots,t_n}(y_1,\dots,y_n) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_k - t_{k-1})}} e^{-(y_k - y_{k-1})^2/2(t_k - t_{k-1})},$$

$y_0 = 0, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$. Совместное распределение случайных величин $B_{t_1}, \dots, B_{t_n}$ можно вычислить по следующей формуле

$$\mathbb{P}_{t_1,\dots,t_n}\{A\} = \int\cdots\int_A p_{t_1,\dots,t_n}(y_1,\dots,y_n)\,dy_1\cdots dy_n, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

6.3. Принцип отражения

Принцип отражения для броуновского движения состоит в том, что отражение броуновского движения относительно некоторой прямой снова является процессом броуновского движения. Пусть процесс броуновского движения $B = \{B_t, t \geq 0\}$ определен на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Он является процессом с независимыми приращениями. К нему, в частности, применима теорема 4.1.2, по которой для любого $s \in \mathbb{R}_+$ случайный процесс $\{B_{t+s} - B_s, t \geq 0\}$ не зависит от сигма-алгебры $\sigma(B_t, 0 \leq t \leq s)$. Это означает, что существуют фильтрации, относительно которых процесс броуновского движения является процессом Леви.

6.3.1. Теорема. *Предположим, что процесс броуновского движения $B = \{B_t, t \geq 0\}$ является процессом Леви относительно фильтрации $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t \colon \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}, t \geq 0\}$. Тогда для любого $\mathbb{F}$-марковского момента τ случайный процесс $\{B_{\tau\wedge t} - (B_t - B_{\tau\wedge t}), t \geq 0\}$ является процессом броуновского движения.*

► Обозначим $B'_t = B_{\tau\wedge t} - (B_t - B_{\tau\wedge t})$. Достаточно доказать, что для любых чисел $n \in \mathbb{N}$ и $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ совместные характеристические функции случайных величин $B'_{t_1}, \dots, B'_{t_n}$ и $B_{t_1}, \dots, B_{t_n}$ совпадают. Заметим, что для любого $k = 1, \dots, n$ выполняется равенство $B_{\tau\wedge t_k} - (B_{t_k} - B_{\tau\wedge t_k}) = B_{(\tau\wedge t_n)\wedge t_k} - (B_{t_k} - B_{(\tau\wedge t_n)\wedge t_k})$. Это наблюдение позволяет взять $\tau \wedge t_n$ вместо τ. Другими словами, при доказательстве равенства характеристических функций можно считать, что τ ограничено некоторым числом. Предположим дополнительно, что множество V значений случайной величины τ конечно. Позже это дополнительное условие будет устранено. Для любых $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}$ справедливо следующее равенство

$$\mathbb{E}e^{i\sum_{k=1}^n u_k B'_{t_k}} = \sum_{v\in V} \mathbb{E}\Big(e^{i\sum_{k=1}^n u_k (B_{v\wedge t_k} - (B_{t_k} - B_{v\wedge t_k}))}\mathbb{1}_{\{\tau=v\}}\Big).$$

Обратим внимание, что функция $e^{iu_1 B_{v\wedge t_1} + \dots + iu_n B_{v\wedge t_n}}\mathbb{1}_{\{\tau=v\}}$ измерима относительно σ-алгебры $\mathcal{F}_v$. Поэтому она не зависит от случайного вектора $((B_{t_1} - B_{v\wedge t_1}), \dots, (B_{t_n} - B_{v\wedge t_n}))$, так как он не зависит от $\mathcal{F}_v$. По теореме 6.1.4 нормальные случайные векторы $((B_{t_1} - B_{v\wedge t_1}), \dots, (B_{t_n} - B_{v\wedge t_n}))$ и $(-(B_{t_1} - B_{v\wedge t_1}), \dots, -(B_{t_n} - B_{v\wedge t_n}))$ одинаково распределены. С учетом этих замечаний мы получим

$$\mathbb{E}e^{i\sum_{k=1}^n u_k B'_{t_k}} = \sum_{v\in V} \mathbb{E}\Big(e^{i\sum_{k=1}^n u_k (B_{v\wedge t_k} - (B_{t_k} - B_{v\wedge t_k}))} \mathbb{1}_{\{\tau=v\}}\Big) =$$

$$= \sum_{v\in V} \mathbb{E}\Big(e^{i\sum_{k=1}^n u_k B_{v\wedge t_k}} \mathbb{1}_{\{\tau=v\}}\Big) \mathbb{E}\Big(e^{-i\sum_{k=1}^n u_k (B_{t_k} - B_{v\wedge t_k})}\Big) =$$

$$= \sum_{v\in V} \mathbb{E}\Big(e^{i\sum_{k=1}^n u_k B_{v\wedge t_k}} \mathbb{1}_{\{\tau=v\}}\Big) \mathbb{E}\Big(e^{i\sum_{k=1}^n u_k (B_{t_k} - B_{v\wedge t_k})}\Big) =$$

$$= \sum_{v\in V} \mathbb{E}\Big(e^{i\sum_{k=1}^n u_k (B_{v\wedge t_k} + (B_{t_k} - B_{v\wedge t_k}))} \mathbb{1}_{\{\tau=v\}}\Big) =$$

$$= \sum_{v\in V} \mathbb{E}\Big(e^{i\sum_{k=1}^n u_k B_{t_k}} \mathbb{1}_{\{\tau=v\}}\Big) = \mathbb{E}e^{i\sum_{k=1}^n u_k B_{t_k}}.$$

Предположим теперь, что τ принимает произвольное число значений. По теореме 3.6.12 найдутся марковские моменты $\tau_m, m \in \mathbb{N}$, такие, что каждый из них принимает конечное число значений и $\tau_m \downarrow \tau$ при $m \uparrow \infty$. По доказанному выше выполняется равенство

$$\mathbb{E}e^{i\sum_{k=1}^n u_k (B_{\tau_m\wedge t_k} - (B_{t_k} - B_{\tau_m\wedge t_k}))} = \mathbb{E}e^{i\sum_{k=1}^n u_k B_{t_k}}.$$

По теореме об ограниченной сходимости можно перейти к пределу под знаком математического ожидания при $m \to \infty$. В результате мы придем к равенству $\mathbb{E}e^{i\sum_{k=1}^n u_k B'_{t_k}} = \mathbb{E}e^{i\sum_{k=1}^n u_k B_{t_k}}$. ◀

Ряд свойств процесса броуновского движения можно выявить с помощью следующей теоремы Башелье (Luis Bachelier).

6.3.2. Теорема. *Пусть дан процесс броуновского движения $B = \{B_t,\ t \geq 0\}$. Для любого $t > 0$ случайные величины $|B_t|$, $M_t = \sup_{0\leq s\leq t} B_s$, $M_t - B_t$ одинаково распределены. Более того, совместные плотности вероятностей пар случайных величин M_t, B_t и $M_t, M_t - B_t$ имеют следующий вид*

$$p_{M_t,B_t}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2(2x-y)}{\sqrt{2\pi}\,t^{3/2}} e^{-(2x-y)^2/2t}, & \textit{если } x \geq y \vee 0, \\ 0, & \textit{в противном случае}; \end{cases}$$

$$p_{M_t,M_t-B_t,}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2(x+y)}{\sqrt{2\pi}t^{3/2}} e^{-(x+y)^2/2t}, & \textit{если } x, y \geq 0, \\ 0, & \textit{в противном случае.} \end{cases}$$

▶ Вычислим совместную плотность вероятностей случайных величин M_t и B_t. Если $0 < x \le y$, то $\mathbb{P}\{M_t < x, B_t < y\} = \mathbb{P}\{M_t < x\}$. Так как $M_t \ge 0$, то $\mathbb{P}\{M_t < x, B_t < y\} = 0$ для $x \le 0, y \in \mathbb{R}$. Пусть $x \ge y \vee 0$. По следствию 3.11.5 функция $\tau = \inf\{s \ge 0 \colon B_s = x\}$, является марковским моментом относительно естественной фильтрации $\{\mathcal{F}_t^{(B)}, t \ge 0\}$, $\mathcal{F}_t^{(B)} = \sigma(B_s, 0 \le s \le t)$, процесса броуновского движения. Заметим, что

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{M_t \ge x, B_t < y\} = \mathbb{P}\{M_t \ge x, B_t < y, \tau \le t, B_{\tau\wedge t} = x\} \le \\ \le \mathbb{P}\{B_{\tau\wedge t} - (B_t - B_{\tau\wedge t}) > 2x - y\}.\end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\{B_{\tau\wedge t} - (B_t - B_{\tau\wedge t}) > 2x - y\} = \\ &= \mathbb{P}\{B_{\tau\wedge t} - (B_t - B_{\tau\wedge t}) > 2x - y, \tau \le t\} + \\ &+ \mathbb{P}\{B_{\tau\wedge t} - (B_t - B_{\tau\wedge t}) > 2x - y, \tau > t\} = \\ &= \mathbb{P}\{B_\tau = x, B_t < y, \tau \le t\} + \mathbb{P}\{B_t > 2x - y, \tau > t\} \le \\ &\le \mathbb{P}\{M_t \ge x, B_t < y\} + \mathbb{P}\{B_t > x, \tau > t\} = \mathbb{P}\{M_t \ge x, B_t < y\}.\end{aligned}$$

Подытоживая, мы получим

$$\mathbb{P}\{M_t < x, B_t < y\} = \begin{cases} 0, & x \le 0, y \in \mathbb{R}, \\ \mathbb{P}\{M_t < x\}, & 0 < x \le y, \\ \mathbb{P}\{B_t < y\} - \mathbb{P}\{B_t' > 2x - y\}, & x \ge y \vee 0. \end{cases}$$

По теореме 6.3.1 случайная величина B_t' имеет нормальное распределение с параметрами 0 и t и, следовательно,

$$\mathbb{P}\{B_t' > 2x - y\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{2x-y}^{\infty} \exp\{-u^2/2t\}\, du.$$

Плотность вероятностей $p_{M_t,B_t}(x, y)$ равна нулю, если $x < 0 \vee y$, и

$$\begin{aligned}p_{M_t,B_t}(x, y) &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \mathbb{P}\{M_t < x, B_t < y\} = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\Big(\frac{-1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{2x-y}^{\infty} \exp\{-u^2/2t\}\, du\Big), x \ge y \vee 0.\end{aligned}$$

Вычисление производной предоставляется читателю.

Совместная функция распределения $\mathbb{P}\{M_t < x, M_t - B_t < y\}$ неотрицательных случайных величин M_t и $M_t - B_t$ равна нулю, и, следовательно, $p_{M_t, M_t - B_t}(x, y) = 0$, если $x \wedge y \leq 0$. Если $x \wedge y > 0$, то

$$\mathbb{P}\{M_t < x, M_t - B_t < y\} = \int\int_{u<x, u-v<y} p_{M_t, B_t}(u, v)\, dudv = \\ = \int_0^x \int_0^y \frac{2(u+v)}{\sqrt{2\pi}t^{3/2}} e^{-(u+v)^2/2t}\, dvdu.$$

Плотность вероятностей $p_{M_t, M_t - B_t}$ вычисляется по формуле

$$p_{M_t, M_t - B_t}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\Big(\int_0^x \int_0^y \frac{2(u+v)}{\sqrt{2\pi}t^{3/2}} e^{-(u+v)^2/2t}\, dvdu\Big).$$

Плотности вероятностей случайных величин $|B_t|, M_t - B_t, M_t$ вычисляются по известным формулам

$$p_{|M_t|}(x) = \frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-x}^x e^{-u^2/(2t)} du\Big) = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/2t}, x \geq 0,$$
$$p_{M_t - B_t}(y) = \int_0^\infty p_{M_t, M_t - B_t}(x, y)\, dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} e^{-y^2/2t}, y \geq 0,$$
$$p_{M_t}(x) = \int_{-\infty}^\infty p_{M_t, B_t}(x, y)\, dy = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/2t}, x \geq 0. \quad ◀$$

6.3.3. Следствие. *Пусть дан процесс броуновского движения* $B = \{B_t, t \geq 0\}$. *Для любого положительного числа* $x > 0$ *случайная величина* $\tau = \inf\{s \geq 0\colon B_s = x\}$ *имеет плотность вероятностей*

$$\frac{d}{dt}\mathbb{P}\{\tau \leq t\} = \frac{x}{\sqrt{2\pi}t^{3/2}} e^{-x^2/2t}, t > 0.$$

▶ Утверждение следует из равенств

$$\mathbb{P}\{\tau \leq t\} = \mathbb{P}\{M_t \geq x\} = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_x^\infty e^{-u^2/2t}\, du. \quad ◀$$

6.3.4. Следствие. *Пусть дан процесс броуновского движения* $B = \{B_t, t \geq 0\}$. *Для любых чисел* $0 \leq a < b, x > 0$ *выполняется неравенство*

$$\mathbb{P}\{\sup_{a \leq t \leq b} |B_t - B_a| > x\} \leq 2\mathbb{P}\{|B_b - B_a| > x\} = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \int_{x/\sqrt{b-a}}^\infty e^{-u^2/2}\, du.$$

► По теореме 6.1.4 случайные процессы $\{B_{a+t} - B_a, t \geq 0\}$ и $\{-(B_{a+t} - B_a), t \geq 0\}$ являются процессами броуновского движения. По теореме Башелье выполняются равенства

$$\mathbb{P}\{\sup_{a \leq t \leq b} (B_t - B_a) > x\} = \mathbb{P}\{|B_b - B_a| > x\},$$
$$\mathbb{P}\{\sup_{a \leq t \leq b} (-(B_t - B_a)) > x\} = \mathbb{P}\{|B_b - B_a| > x\}.$$

Отсюда следует, что

$$\mathbb{P}\{\sup_{a \leq t \leq b} |B_t - B_a| > x\} \leq \mathbb{P}\{\sup_{a \leq t \leq b} (B_t - B_a) > x\} +$$
$$+ \mathbb{P}\{\sup_{a \leq t \leq b} (-(B_t - B_a)) > x\} = 2\mathbb{P}\{|B_b - B_a| > x\}. \quad ◄$$

6.4. Броуновские траектории

Траектории процесса броуновского движения обладают интересными свойствами. Здесь будут исследованы некоторые из них. Пусть процесс броуновского движения $B = \{B_t, t \geq 0\}$ определен на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

6.4.1. Теорема. *Разобьем сегмент* $[a, b], 0 \leq a < b$, *точками* $a = t_{n,0} < \cdots < t_{n,m_n} = b$ *таким образом, чтобы выполнялось условие* $\lim_{n\to\infty} \max_{1 \leq k \leq m_n} (t_{n,k} - t_{n,k-1}) = 0$. *Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\Big|\sum_{k=1}^{m_n} (B_{t_{n,k}} - B_{t_{n,k-1}})^2 - (b-a)\Big|^2 = 0. \tag{6.4.1}$$

► По формуле $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ для $A, B \in \mathbb{R}$ выражение под знаком предела можно переписать в следующем виде

$$\mathbb{E}\Big|\sum_{k=1}^{m_n} (B_{t_{n,k}} - B_{t_{n,k-1}})^2 - (b-a)\Big|^2 = \mathbb{E}\Big|\sum_{k=1}^{m_n} (B_{t_{n,k}} - B_{t_{n,k-1}})^2\Big|^2 -$$
$$- 2(b-a) \sum_{k=1}^{m_n} \mathbb{E}|B_{t_{n,k}} - B_{t_{n,k-1}}|^2 + (b-a)^2.$$

Так как $\mathbb{E}|B_{t_{n,k}} - B_{t_{n,k-1}}|^2 = t_{n,k} - t_{n,k-1}$ и $\sum_{k=1}^{m_n} (t_{n,k} - t_{n,k-1}) = b - a$, то предыдущее равенство принимает следующий вид

$$\mathbb{E}\Big|\sum_{k=1}^{m_n} (B_{t_{n,k}} - B_{t_{n,k-1}})^2 - (b-a)\Big|^2 = \mathbb{E}\Big|\sum_{k=1}^{m_n} (B_{t_{n,k}} - B_{t_{n,k-1}})^2\Big|^2 - (b-a)^2.$$

Для вычисления математического ожидания справа можно воспользоваться формулой $(a_1 + \cdots + a_n)^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2\sum_{1\le k<m\le n} a_k a_m$ для любых $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, что приведет к равенству

$$\mathbb{E}\Big|\sum_{k=1}^{m_n}(B_{t_{n,k}} - B_{t_{n,k-1}})^2\Big|^2 = \sum_{k=1}^{m_n}\mathbb{E}\big|B_{t_{n,k}} - B_{t_{n,k-1}}\big|^4 + \\ + 2\sum_{1\le k<m\le m_n}\mathbb{E}\big(|B_{t_{n,k}} - B_{t_{n,k-1}}|^2|B_{t_{n,m}} - B_{t_{n,m-1}}|^2\big).$$

Процесс броуновского движения имеет независимые приращения, и, следовательно,

$$\mathbb{E}\big(|B_{t_{n,k}} - B_{t_{n,k-1}}|^2|B_{t_{n,m}} - B_{t_{n,m-1}}|^2\big) = (t_{n,k} - t_{n,k-1})(t_{n,m} - t_{n,m-1}).$$

Нетрудно проверить, что $\mathbb{E}|B_{t_{n,k}} - B_{t_{n,k-1}}|^4 = 3|t_{n,k} - t_{n,k-1}|^2$. В результате получается равенство

$$\mathbb{E}\Big|\sum_{k=1}^{m_n}(B_{t_{n,k}} - B_{t_{n,k-1}})^2\Big|^2 = 3\sum_{k=1}^{m_n}|t_{n,k} - t_{n,k-1}|^2 + \\ + 2\sum_{1\le k<m\le m_n}\big((t_{n,k} - t_{n,k-1})(t_{n,m} - t_{n,m-1})\big).$$

Это равенство можно переписать в следующем виде

$$\mathbb{E}\Big|\sum_{k=1}^{m_n}(B_{t_{n,k}} - B_{t_{n,k-1}})^2\Big|^2 = 2\sum_{k=1}^{m_n}|t_{n,k} - t_{n,k-1}|^2 + \Big(\sum_{k=1}^{m_n}(t_{n,k} - t_{n,k-1})\Big)^2.$$

В итоге выражение под знаком предела в (6.4.1) удается вычислить

$$\mathbb{E}\Big|\sum_{k=1}^{m_n}(B_{t_{n,k}} - B_{t_{n,k-1}})^2 - (b-a)\Big|^2 = 2\sum_{k=1}^{m_n}|t_{n,k} - t_{n,k-1}|^2. \tag{6.4.2}$$

Отсюда следует (6.4.1), так как

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{m_n}|t_{n,k} - t_{n,k-1}|^2 \le \lim_{n\to\infty}\max_{1\le k\le m_n}(t_{n,k} - t_{n,k-1})(b-a) = 0. \quad ◄$$

Из теоремы 6.4.1 следует, что последовательность $\{S_n\}_{n\ge1}$ сумм $S_n = \sum_{k=1}^{m_n}(B_{t_{n,k}} - B_{t_{n,k-1}})^2$ сходится по вероятности к $b-a$. Если сегмент $[a,b]$ подвергнуть делению на более короткие отрезки, то сходимость по вероятности можно заменить сходимостью п.в.

6.4.2. Теорема. *Разобьем сегмент* $[a,b], 0 \le a < b$, *точками* $a = t_{n,0} < \cdots < t_{n,m_n} = b$ *таким образом, чтобы сходился ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \max_{1\le k\le m_n}(t_{n,k} - t_{n,k-1})$. *Тогда имеет место сходимость*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m_n} (B_{t_{n,k}} - B_{t_{n,k-1}})^2 = (b-a) \text{ п.в.} \tag{6.4.3}$$

► Заметим, что $\sum_{k=1}^{m_n}(t_{n,k} - t_{n,k-1}) = b - a$ и

$$\sum_{k=1}^{m_n} |t_{n,k} - t_{n,k-1}|^2 \le c_n(b-a), c_n = \max_{1\le k\le m_n}(t_{n,k} - t_{n,k-1}).$$

Отсюда и из равенства (6.4.2) следует, что

$$\mathbb{E}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \big|\sum_{k=1}^{m_n}(B_{t_{n,k}} - B_{t_{n,k-1}})^2 - (b-a)\big|^2\Big) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\big|\sum_{k=1}^{m_n}(B_{t_{n,k}} - B_{t_{n,k-1}})^2 - (b-a)\big|^2 \le 2(b-a)\sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty.$$

Перемена местами математического ожидания и суммирования возможна по теореме 1.6.3. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\big|\sum_{k=1}^{m_n}(B_{t_{n,k}} - B_{t_{n,k-1}})^2 - (b-a)\big|^2$ сходится п.в. Отсюда следует утверждение (6.4.3). ◄

6.4.3. Следствие. *Почти все траектории процесса броуновского движения имеют неограниченную вариацию.*

► По определению 1.9.1 вариация процесса броуновского движения $\{B_t, t \in [a,b]\}$ равна

$$V_a^b(B) = \sup\Big\{\sum_{k=1}^{n} |B_{t_k} - B_{t_{k-1}}| \colon a = t_0 < \cdots < t_n = b\Big\}.$$

Предположим, что вариация $V_a^b(B)$ конечна на некотором множестве $\Omega' \in \mathcal{F}$ положительной вероятности. Для любых разбиений $a = t_{n,0} < \cdots < t_{m_n} = b$, удовлетворяющих условию из теоремы 6.4.2, справедливы следующие противоречивые соотношения

$$b-a = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{m_n} |B_{t_k} - B_{t_{k-1}}|^2 \le V_a^b(B) \lim_{n\to\infty} \sup_{1\le k\le m_n} |B_{t_{n,k}} - B_{t_{n,k-1}}| = 0$$

п.в. на множестве Ω'. Неравенства $0 < b-a \leq 0$ не могут выполняться. Напомним, что все траектории процесса броуновского движения непрерывны и, следовательно, предел справа равен нулю. ◀

В 1924 году Александр Яковлевич Хинчин открыл важное свойство процесса броуновского движения, получившего название *закона повторного логарифма.*

6.4.4. Теорема. *Произвольный процесс броуновского движения $B = \{B_t, t \geq 0\}$ удовлетворяет закону повторного логарифма*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}} = 1, \liminf_{t\to\infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}} = -1 \text{ п.в.} \tag{6.4.4}$$

▶ Достаточно доказать первое утверждение. Второе утверждение получается путем замены B_t на $-B_t$,

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}} = -\limsup_{t\to\infty} \frac{-B_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}} = -1 \text{ п.в.}$$

Напомним (см. теорему 6.1.4), что $\{-B_t, t \geq 0\}$ является процессом броуновского движения. Далее предполагается, что $t > e^3$. Сначала будет доказано неравенство

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{|B_t|}{\sqrt{2t\ln\ln t}} \leq 1 \text{ п.в.} \tag{6.4.5}$$

Для любых $c \in (1,2)$ и $\varepsilon > 0$, в силу правого неравенства (2.4.5), справедлива следующая оценка

$$\mathbb{P}\{|B_{c^n}| > (1+\varepsilon)\sqrt{2c^n\ln\ln c^n}\} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{(1+\varepsilon)\sqrt{2\ln\ln c^n}}^{\infty} e^{-x^2/2}dx <$$
$$< \frac{1}{(1+\varepsilon)\sqrt{\pi\ln\ln c^n}}(n\ln c)^{-(1+\varepsilon)^2}.$$

В силу этой оценки ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{|B_{c^n}| > (1+\varepsilon)\sqrt{2c^n\ln\ln c^n}\} \text{ сходится.} \tag{6.4.6}$$

Так как процесс броуновского движения непрерывен, то множество $A_n = \{\sup_{c^n\leq t\leq c^{n+1}} |(B_t/\sqrt{2t\ln\ln t}) - (B_{c^n}/\sqrt{2c^n\ln\ln c^n})| > \varepsilon\}$ является событием. Для $e^3 < c^n \le t \le c^{n+1}$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{B_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}} - \frac{B_{c^n}}{\sqrt{2c^n\ln\ln c^n}}\Big| = \\
&\qquad = \Big|\frac{B_t - B_{c^n}}{\sqrt{2t\ln\ln t}} + \frac{B_{c^n}}{\sqrt{2t\ln\ln t}} - \frac{B_{c^n}}{\sqrt{2c^n\ln\ln c^n}}\Big| \le \\
&\qquad\quad \le \frac{|B_t - B_{c^n}|}{\sqrt{2c^n\ln\ln c^n}} + |B_{c^n}|\Big(\frac{1}{\sqrt{2c^n\ln\ln c^n}} - \frac{1}{\sqrt{2t\ln\ln t}}\Big).
\end{aligned}$$

По формуле Лагранжа найдется $t' \in [c^n, t]$ такое, что

$$\frac{1}{\sqrt{2c^n\ln\ln c^n}} - \frac{1}{\sqrt{2t\ln\ln t}} = \frac{\ln\ln t' \cdot \ln t' + 1}{\ln t' \cdot (2t'\ln\ln t')^{3/2}}(t - c^n).$$

Отсюда для $t \in [c^n, c^{n+1}], n \ge n_0, c^{n_0} > e^3$ следует оценка

$$\frac{1}{\sqrt{2c^n\ln\ln c^n}} - \frac{1}{\sqrt{2t\ln\ln t}} \le \frac{c-1}{\sqrt{2c^n\ln\ln c^n}} \le \frac{\sqrt{c-1}}{\sqrt{2c^n\ln\ln c^n}}.$$

Из этих неравенств следует, что

$$\Big|\frac{B_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}} - \frac{B_{c^n}}{\sqrt{2c^n\ln\ln c^n}}\Big| \le \frac{|B_t - B_{c^n}|}{\sqrt{2c^n\ln\ln c^n}} + \frac{|B_{c^n}|\sqrt{c-1}}{\sqrt{2c^n\ln\ln c^n}}.$$

Вероятность события A_n можно оценить следующим образом

$$\mathbb{P}\{A_n\} \le \mathbb{P}\{A'_n\} + \mathbb{P}\{A''_n\}, \tag{6.4.7}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{A'_n\} &= \mathbb{P}\Big\{\sup_{c^n \le t \le c^{n+1}} |B_t - B_{c^n}| > \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{2c^n\ln\ln c^n}\Big\}, \\
\mathbb{P}\{A''_n\} &= \mathbb{P}\Big\{|B_{c^n}| > \frac{\varepsilon}{2\sqrt{c-1}}\sqrt{2c^n\ln\ln c^n}\Big\}.
\end{aligned}$$

Следствие 6.3.4 и правое неравенство (2.4.5) позволяют следующим образом оценить вероятность события A'_n,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\{A'_n\} \le 2\mathbb{P}\{|B_{c^{n+1}} - B_{c^n}| > \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{2c^n\ln\ln c^n}\} = \\
&\quad = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\varepsilon\sqrt{\ln\ln c^n/(2(c-1))}}^{\infty} e^{-x^2/2}dx \le \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{(n\ln c)^{-\varepsilon^2/(4(c-1))}}{\varepsilon\sqrt{\ln\ln c^n/(2(c-1))}}.
\end{aligned}$$

Аналогичная оценка справедлива для $\mathbb{P}\{A''_n\}$ с заменой $4/\sqrt{2\pi}$ на $2/\sqrt{2\pi}$. Из приведенных оценок и из (6.4.7) следует, что

$$\mathbb{P}\{A_n\} \leq \frac{6}{\sqrt{2\pi}} \frac{(n \ln c)^{-\varepsilon^2/(4(c-1))}}{\varepsilon\sqrt{\ln\ln c^n/(2(c-1))}}.$$

Если $n \geq n_0$ и $\varepsilon^2/(4(c-1)) > 1$, то ряды $\sum_{n=n_0}^{\infty} \mathbb{P}\{A''_n\} < \infty$ и $\sum_{n=n_0}^{\infty} \mathbb{P}\{A_n\} < \infty$ сходятся. По лемме Бореля – Кантелли (теорема 1.5.16) событие $\cup_{m=1}^{\infty} \cap_{n=m}^{\infty} \{A_n^c\}$ имеет единичную вероятность. В силу (6.4.6) событие $\cup_{m=1}^{\infty} \cap_{n=m}^{\infty} \{|B_{c^n}| \leq (1+\varepsilon)\sqrt{2c^n \ln\ln c^n}\}$ также имеет единичную вероятность. Отсюда следует, что для любого $\omega \in \Omega_{\varepsilon,c} = \cup_{m=1}^{\infty} \cap_{n=m}^{\infty} (\cap A_n^c \cap \{|B_{c^n}| \leq (1+\varepsilon)(\sqrt{2c^n \ln\ln c^n}\})$ найдется $n_{\varepsilon,c,\omega} \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $n \geq n_{\varepsilon,c,\omega}$ выполняются неравенства

$$\sup_{c^n \leq t \leq c^{n+1}} |(B_t(\omega)/\sqrt{2t\ln\ln t}) - (B_{c^n}(\omega)/\sqrt{2c^n \ln\ln c^n})| \leq \varepsilon,$$
$$|B_{c^n}(\omega)| \leq (1+\varepsilon)\sqrt{2c^n \ln\ln c^c},$$

и, следовательно,

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{|B_t(\omega)|}{\sqrt{2t\ln\ln t}} \leq 1 + 2\varepsilon. \qquad (6.4.8)$$

Положим $\varepsilon = \varepsilon_r = 1/r$, и возьмем $c = c_r \in (1, 1 + 1/(4r^2))$. Для любого $r \in \mathbb{N}, r > 1$, выполняется условие $\varepsilon_r^2/(4(c_r - 1)) > 1$. Событие $\Omega' = \cap_{r=2}^{\infty} \Omega_{\varepsilon_r, c_r}$ имеет единичную вероятность. Для любых $\omega \in \Omega'$ и $r \in \mathbb{N}, r \geq 2$, выполняется неравенство (6.4.8) с $\varepsilon = \varepsilon_r$. Предельный переход $r \uparrow \infty$ ведет к требуемому неравенству (6.4.5).

Для доказательства теоремы достаточно убедиться, что

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}} \geq 1 \text{ п.в.} \qquad (6.4.9)$$

Пусть $0 < \varepsilon < 1/2$. Выберем число $m \in \mathbb{N}$ такое, что $1/\sqrt{m} < \varepsilon^2$ и $\sqrt{m-1}/\sqrt{m} > 1 - \varepsilon$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ определим событие $C_n = \{B_{m^{n+1}} - B_{m^n} > (1-\varepsilon)\sqrt{2(m^{n+1} - m^n)\ln\ln(m^{n+1} - m^n)}\}$. В силу левого неравенства (2.4.5) справедлива следующая оценка

$$\mathbb{P}\{C_n\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(1-\varepsilon)\sqrt{2\ln\ln(m^{n+1}-m^n)}}^{\infty} e^{-x^2/2} dx >$$
$$> \frac{(1-\varepsilon)\sqrt{2\ln\ln(m^{n+1} - m^n)}}{\sqrt{2\pi}(1 + (1-\varepsilon)^2 2\ln\ln(m^{n+1} - m^n))} (n \ln m + \ln(m-1))^{-(1-\varepsilon)^2}.$$

Из этой оценки следует, что $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{C_n\} = \infty$. События $C_n, n \in \mathbb{N}$, независимы. По лемме Бореля–Кантелли (теорема 2.1.16) событие $\Omega_\varepsilon = \cap_{k=1}^{\infty} \cup_{n=k}^{\infty} C_n$ имеет единичную вероятность. Для любого $\omega \in \Omega_\varepsilon$ существует последовательность $\{n_k\}_{k\geq 1}$ натуральных чисел такая, что для всех $k \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$B_{m^{n_k+1}}(\omega) - B_{m^{n_k}}(\omega) > (1-\varepsilon)\sqrt{2(m^{n_k+1} - m^{n_k}) \ln\ln(m^{n_k+1} - m^{n_k})}.$$

Разделим все члены этого неравенства на $\sqrt{2m^{n_k+1} \ln\ln m^{n_k+1}}$ и полученное неравенство запишем в следующем виде

$$\frac{B_{m^{n_k+1}}(\omega)}{\sqrt{2m^{n_k+1} \ln\ln m^{n_k+1}}} > \frac{B_{m^{n_k}}(\omega)}{\sqrt{2m^{n_k} \ln\ln m^{n_k}}} \frac{\sqrt{m^{n_k} \ln\ln m^{n_k}}}{\sqrt{m^{n_k+1} \ln\ln m^{n_k+1}}} + \\ + (1-\varepsilon)\frac{\sqrt{(m^{n_k+1} - m^{n_k}) \ln\ln(m^{n_k+1} - m^{n_k})}}{\sqrt{m^{n_k+1} \ln\ln m^{n_k+1}}}.$$

По доказанному выше выполняется неравенство (6.4.5) на некотором множестве $\Omega' \in \mathcal{F}$ единичной вероятности. Пусть $\omega \in \Omega' \cap \Omega_\varepsilon$. Предельный переход при $k \uparrow \infty$ приведет к неравенствам

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{B_t(\omega)}{\sqrt{2t \ln\ln t}} \geq \limsup_{k\to\infty} \frac{B_{m^{n_k+1}}(\omega)}{\sqrt{2m^{n_k+1} \ln\ln m^{n_k+1}}} \geq \\ \geq -\frac{1}{\sqrt{m}} + (1-\varepsilon)\frac{\sqrt{m-1}}{\sqrt{m}} > 1 - 2\varepsilon. \quad (6.4.10)$$

Напомним, что выбор числа $\varepsilon \in (0, 1/2)$ находится в нашем распоряжении. Поэтому для любого $\varepsilon = \varepsilon_r = 1/(r+2), r \in \mathbb{N}$, существует событие Ω_{ε_r} единичной вероятности такое, что для любого $\omega \in \Omega' \cap \Omega_{\varepsilon_r}$ выполняется неравенство между левой и правой частями в (6.4.10) с $\varepsilon = \varepsilon_r$. Это неравенство выполняется для любых $\omega \in \cap_{r=1}^{\infty}(\Omega' \cap \Omega_{\varepsilon_r})$ и $\varepsilon = \varepsilon_r$. Пересечение $\cap_{r=1}^{\infty}(\Omega' \cap \Omega_{\varepsilon_r})$ является событием единичной вероятности. Предельный переход при $r \uparrow \infty$ приведет к (6.4.9). ◄

6.4.5. Следствие. *Любой процесс броуновского движения удовлетворяет локальному закону повторного логарифма,*

$$\limsup_{t\to 0} \frac{B_t}{\sqrt{2t \ln\ln(1/t)}} = 1, \liminf_{t\to 0} \frac{B_t}{\sqrt{2t \ln\ln(1/t)}} = -1 \text{ п.в.}$$

► По теореме 6.1.4 случайный процесс $\{B'_t, t \geq 0\}$, где $B'_0 = 0$, $B'_t = tB_{1/t}, t > 0$, является процессом броуновского движения. Следствие является результатом применения теоремы 6.4.4 к процессу броуновского движения B'. ◄

6.4.6. Следствие. *Почти каждая траектория процесса броуновского движения нигде не дифференцируема.*

► По теореме 6.1.4 для любого $a \geq 0$ случайный процесс $\{B_{a+t} - B_a, t \geq 0\}$ является процессом броуновского движения. По следствию 6.4.5 существует множество $\Omega' \in \mathcal{F}$ единичной вероятности такое, что для любого $\omega \in \Omega'$ выполняются следующие два соотношения

$$\limsup_{t\downarrow 0}(\liminf_{t\downarrow 0})\frac{B_{a+t}(\omega) - B_a(\omega)}{\sqrt{2t\ln\ln(1/t)}} = 1(-1).$$

Поэтому для любого $\omega \in \Omega'$ найдутся последовательности $\{t'_n\}_{n\geq 1}$, $t'_n = t'_n(\omega)$, и $\{t''_n\}_{n\geq 1}, t''_n = t''_n(\omega)$, убывающие к нулю такие, что

$$\lim_{t'_n\downarrow 0}\frac{B_{a+t'_n}(\omega) - B_a(\omega)}{t'_n} = \lim_{t'_n\downarrow 0}\frac{B_{a+t'_n}(\omega) - B_a(\omega)}{\sqrt{2t'_n\ln\ln(1/t'_n)}}\frac{\sqrt{2\ln\ln(1/t'_n)}}{\sqrt{t'_n}} = \infty,$$

$$\lim_{t''_n\downarrow 0}\frac{B_{a+t''_n}(\omega) - B_a(\omega)}{t''_n} = \lim_{t''_n\downarrow 0}\frac{B_{a+t''_n}(\omega) - B_a(\omega)}{\sqrt{2t''_n\ln\ln(1/t''_n)}}\frac{\sqrt{2\ln\ln(1/t''_n)}}{\sqrt{t''_n}} = -\infty.$$

Эти соотношения показывают, что почти все траектории процесса броуновского движения нигде не имеют правой производной, и тем более они не имеют двухсторонних производных. ◄

6.5. Многомерное броуновское движение

Наряду с одномерным процессом броуновского движения можно определить процесс броуновского движения со значениями в произвольном евклидовом пространстве, а также в гильбертовом пространстве. Самый простой способ построить многомерный процесс броуновского движения состоит в том, чтобы воспользоваться уже имеющейся конструкцией одномерного процесса броуновского движения. Предполагается, что все рассматриваемые ниже случайные процессы определены на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

6.5.1. Определение. Непрерывный d-мерный случайный процесс $B = \{B_t, t \in T\}, B_t\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$, с параметрическим множеством $T = [a, b]$ или $T = [a, \infty), a, b \in \mathbb{R}, a < b$, называется d-мерным *процессом броуновского движения,* если: (i) $B_a = 0$;
(ii) для любых $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n, n \geq 2$, из T случайные векторы $B_{t_k} - B_{t_{k-1}}, k = 1, \ldots, n$, независимы;

(iii) для любых $s, t \in T, s < t$, разность $B_t - B_s$ имеет d-мерное нормальное распределение с математическим ожиданием $\mathbb{E}(B_t - B_s) = 0$ и с ковариационной матрицей $(t-s)\mathbb{1}$, где $\mathbb{1}$ – единичная матрица.

Случайный вектор $B_t - B_s = (B_{1,t} - B_{1,s}, \ldots, B_{d,t} - B_{d,s})$ определяется своей характеристической функцией (2.4.2)

$$\mathbb{E}\exp\{i\langle u, B_t - B_s\rangle\} = \exp\Big\{-\frac{t-s}{2}\sum_{k=1}^{d} u_k^2\Big\}, u = (u_1, \ldots, u_d) \in \mathbb{R}^d.$$

Напомним, что $\langle u, B_t - B_s\rangle = \sum_{k=1}^d u_k(B_{k,t} - B_{k,s})$. По теореме 2.1.12 случайные величины $B_{1,t} - B_{1,s}, \ldots, B_{d,t} - B_{d,s}$ независимы и имеют общее нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией $t-s$. Тем самым доказано, что каждая компонента d-мерного процесса броуновского процесса является одномерным процессом броуновского движения. Это замечание позволяет перенести многие свойства одномерного процесса броуновского движения на многомерный случай. В частности, для многомерного процесса броуновского движения справедлив принцип отражения и теорема 6.3.1.

6.5.2. Теорема. *Пусть d-мерный процесс броуновского движения $B = \{B_t, t \geq 0\}$ является процессом Леви относительно некоторой фильтрации $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t \colon \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}, t \geq 0\}$. Тогда для любого $\mathbb{F}$-марковского момента τ случайный процесс $\{B_{\tau\wedge t} - (B_t - B_{\tau\wedge t}), t \geq 0\}$ является d-мерным процессом броуновского движения.*

6.5.3. Задача. Доказать теорему 6.5.2.

6.5.4. Теорема. *Пусть дан d-мерный процесс броуновского движения $B = \{B_t, t \geq 0\}$. Тогда каждый из следующих случайных процессов является d-мерным процессом броуновского движения:* (i) $\{-B_t, t \geq 0\}$; (ii) $\{B_{a+t} - B_a, t \geq 0\}$ *для любого числа* $a > 0$; (iii) $\{\sqrt{c}B_{t/c}, t \geq 0\}$ *для любого числа* $c > 0$; (iv) $\{tB_{1/t}, t \geq 0\}$, *где* $tB_{1/t} = 0$ *при* $t = 0$ *полагают по определению.*

6.5.5. Задача. Доказать теорему 6.5.4.

Библиографический комментарий

В данном комментарии приведены дополнительные сведения об источниках, на которых построено изложение материала первой части учебника. В большинстве случаев ссылки даны на учебники и монографии, и только в редких случаях упоминаются оригинальные исследования.

Глава 1. В этой главе приведены необходимые сведения и необходимый математический аппарат для изучения случайных процессов.

1.1.–1.3. Среди прочего следует выделить теорему Серпинского (теорема 1.2.7), оказавшейся полезной во многих ситуациях. Оригинальное доказательство теоремы можно прочитать в статье: *Sierpiński, W.* Un théorème général sur les familles d'ensembles // Fundamenta Mathematicae. 1928. V. 12. P. 206–210. Источником сведений об аксиоме выбора послужила статья Серпинского: *Sierpiński, W.* Аксиома Zermelo и ее роль в теории множеств и анализе // Математ. сб. 1922. Т. 31. № 1. С. 94–128.

1.4.–1.8. Дополнительные сведения об интегрировании по мере можно найти в учебниках [19] и [23]. Учтены все доступные автору методические находки, призванные упростить доказательства. Одна из них принадлежит: *Brooks, J. K.* The Lebesgue decomposition theorem for measures // The American Mathematical Monthly. 1971. V. 78. № 6. P. 660–661. Она позволяет доказать обобщение теоремы Лебега о разложении меры.

1.9.–1.10. Источником сведений о функциях ограниченной вариации послужила книга: *Stoltz, O.* Grunzüge der differential und integralrechnung. V. 1. Leipzig : Teubner, 1893. Эта довольно старая книга содержит много интересных «забытых» утверждений.

Глава 2. Монография Колмогорова [14], а также учебники [16] и [19] послужили источниками сведений по теории вероятностей.

2.1. Дополнительные сведения о понятии независимости можно найти в книгах [2], [14], [16], [19].

2.2. Источниками сведений о гильбертовом пространстве послужили учебники: *Колмогоров, А. Н., Фомин, С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М. : Наука, 1989 и *Шилов, Г. Е.* Введение в теорию линейных пространств. М. : ГИТТЛ, 1956.

2.3. Источниками о преобразованиях Фурье (о характеристических функциях) послужили учебник [16] и монография: *Лукач, Е.* Характеристические функции. М. : Наука, 1979.

2.4. Со свойствами нормального распределения можно познакомиться по монографии: *Tong, Y. L.* The multivariate normal distribution. New York : Springer–Verlag, 1990.

2.5. Теория условных математических ожиданий построена Колмогоровым в его монографии [14]. Современная трактовка понятия условного математического ожидания изложена в [8], [16], [19].

Глава 3. О случайных процессах можно почитать в книгах: [1], [2], [4], [9], [10], [21], [22], *Karlin, S., Taylor, H. M.* A first course in stochastic processes. New York : Academic press, inc., 1975; *Karlin, S., Taylor, H. M.* A second course in stochastic processes. New York : Academic press, inc., 1981.

3.1. Оригинальное доказательство теоремы 3.1.3 можно прочитать в монографии Колмогорова [14].

3.2. Источником сведений о сепарабельных случайных процессах послужила монография Дуба [8].

3.3. Основной результат (теорема 3.3.4) этого параграфа является обобщением теоремы Колмогорова (теорема 3.3.5), опубликованной в статье: *Slutsky, E.* Qualche proposizione relativa alla teoria delle funzioni aleatorie // Giorn. Ist. Ital. Attuari. 1937. V. 8. P. 183–199.

3.4. Другие доказательства теоремы 3.4.7 можно найти в учебнике [5] и в статье: *Cramér, H.* On stochastic processes whose trajectories have no discontinuities of the second kind // Ann. mat. pura ed appl. 1966. V. 71. P. 85–92. Эта теорема является обобщением теоремы Ченцова из статьи: *Ченцов, Н. Н.* Слабая сходимость случайных процессов с траекториями без разрывов второго рода и так называемый эвристический подход к критерию согласия типа Колмогорова-Смирнова // Теор. вероятн. и примен. 1956. Т.1. Вып. 1. С. 155–161.

3.5.–3.11. Об основах общей теории случайных процессов можно прочитать в книгах [1], [3], [6], [7], [12], [17].

3.12. Источниками сведений о равномерно интегрируемых случайных процессах послужила книга: *П.А. Мейер, П. А.* Вероятность и потенциалы. М. : Мир, 1973 и обзор: *Diestel, J.* Uniform integrability: an introduction // Rend. Ist. mat. univ. Trieste. 1991. V. 23. P. 41–80.

Глава 4. Источниками сведений о случайных процессах с независимыми приращениями послужили монографии [22] и *Bertoin, J.* Levy processes. Cambridge : Cambridge univ. press, 1996.

4.1. Параграф написан на основе статьи: *Круглов, В. М.* О непрерывности естественной фильтрации случайных процессов с независимыми приращениями // Теор. вероятн. и примен. 2009. Т. 54. Вып. 4. С. 783–789.

4.2. Большинство из приведенных неравенств для сумм независимых случайных величин можно найти в монографии [22]. Неравенство Этемади заимствовано из его статьи: *Etemadi, N.* On some classical results in probability theory // Sankhya. Ser. A.1985. V. 47, № 2. P. 215–221.

4.3. Свойства траекторий случайных процессов изучались в монографиях [22] и Бертоина (J. Bertoin), упомянутой выше.

4.4. Дополнительные сведения о непрерывности случайных процессов с независимыми приращениями можно найти в монографии [22] и статье Леви: *Lévy, P.* La mouvement Brownien plan // Amer. J. Math. 1940, V. 62. P. 487–550.

4.5. Основной результат этого параграфа (теорема 4.5.3) заимствован из монографии [22]. Доказательство теоремы взято из статьи: *Круглов, В. М.* Простое доказательство неограниченности однородных случайных процессов с независимыми приращениями // Теор. вероятн. и применен. 2011. Т. 56. Вып. 4. С. 806–808.

4.6. Источниками сведений о процессах Леви послужили упомянутая выше монография Бертоин (J. Bertoin) и учебник: *Protter, P. E.* Stochastic integration and differential equations, 2-nd. ed. New York : Springer, 2004.

Глава 5. Сведения о пуассоновском процессе взяты из книг: [13] и *Круглов, В. М.* Пуассоновские процессы. М. : МАКС Пресс, 2008.

5.1.–5.2. Краткое описание конструкции пуассоновского процесса содержится в первом выпуске монографии Ито [10].

5.3.–5.4. Теорема 5.4.2 о характеризации экспоненциального распределения взята из статьи Набеи: *Nabey, S.* On relation between Exponential law and Poisson's law // Ann. Inst. Statist. Mathem. 1950, V. 2. P. 13–16.

5.5. Основной результат параграфа (теорема 5.5.3) представляет собой обобщение и уточнение теоремы Хинчина о потоках событий из его монографии: *Хинчин, А. Я.* Работы по математической теории массового обслуживания. М. : Физматгиз, 1963.

Глава 6. Источниками сведений о процессе броуновского движения послужили монографии [25]; *Леви, П.* Стохастические процессы и броуновское движение. М. : Наука, 1972; *Nelson, E.* Dynamical theories of Brownian motion, 2-nd. ed. Princeton : Princeton univ. press, 2001; *Бородин, А., Салминен, П.* Справочник по броуновскому движению. СПб. : Изд-во Лань, 2000.

6.1.–6.2. Большинство известных конструкций процесса броуновского движения можно найти в монографии [11].

6.3. Принцип отражения (теорема 6.3.1) и многие его следствия можно найти в большинстве учебников по случайным процессам.

6.4. Оригинальное доказательство закона повторного логарифма Хинчина (теорема 6.4.4) можно прочитать в монографии: *Хинчин, А. Я.* Асимптотические законы теории вероятностей. М. : ОНТИ, 1936.

6.5. О свойствах многомерного процесса броуновского движения можно прочитать в учебнике [12].

Литература

[1] *Бородин, А. Н.* Случайные процессы : учебник / А. Н. Бородин. — СПб. : Изд-во Лань, 2013.

[2] *Булинский, А. В.* Теория случайных процессов : учеб. пособие / А. В. Булинский, А. Н. Ширяев. — М. : Лаборатория базовых знаний, 2003.

[3] *Ватанабэ, С.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы : пер. с англ. / С. Ватанабэ, Н. Икеда. — М. : Наука, 1986.

[4] *Вентцель, А. Д.* Курс теории случайных процессов : учеб. пособие / А. Д. Вентцель — 2-е изд. — М. : Физматлит, 1996.

[5] *Гихман, И. И.* Введение в теорию случайных процессов : учебник / И. И. Гихман, А. В. Скороход. — 2-е изд. — М. : Наука, 1977.

[6] *Гихман, И. И.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения / И. И. Гихман, А. В. Скороход. — Киев : Наукова Думка, 1982.

[7] *Делашери, К.* Емкости и случайные процессы : пер. с фр. / К. Делашери. — М. : Мир, 1975.

[8] *Дуб, Дж.* Вероятностные процессы : пер. с англ. / Дж. Дуб. — М. : ИЛ, 1956.

[9] *Ибрагимов, И. А.* Гауссовские случайные процессы / И. А. Ибрагимов, Ю. А. Розанов. — М. : Наука, 1970.

[10] *Ито, К.* Вероятностные процессы : пер. с япон. / К. Ито. — Вып. 1. — М. : ИЛ, 1960; — Вып. 2. — М. : ИЛ, 1963.

[11] *Ито, К.* Диффузионные процессы и их траектории : пер. с англ. / К. Ито, Н. Маккин. — М. : Мир, 1968.

[12] *Йех, Дж.* (*Yeh, J.*) Martingales and Stochastic analysis / J. Yeh. — Singapore : Wold Scientific, 1995.

[13] *Кингман, Дж.* Пуассоновские процессы : пер. с англ. / Дж. Кингман. — М. : МЦНМО, 2007.

[14] *Колмогоров, А. Н.* Основные понятия теории вероятностей / А. Н. Колмогоров. — 3-е изд. — М. : Фазис, 1998.

[15] *Ламперти, Дж.* Случайные процессы : пер. с анг. / Дж. Ламперти. — Киев : Вища школа, 1983.

[16] *Лоэв, М.* Теория вероятностей : пер с англ. / М. Лоэв. — М. : ИЛ, 1962.

[17] *Медвегуев. П.* (*Medvegyev, P.*) Stochastic integration theory / P. Medvegyev. — Oxford : Oxford Univ. Press, 2007.

[18] *Оксендал, Б. К.* Стохастические дифференциальные уравнения: пер. с англ. / Б. К. Оксендал. — 5-е изд. — М. : МЦМИО, 2002.

[19] *Партасарати, К.* Введение в теорию вероятностей и теорию меры / К. Партасарати. — М. : Мир, 1983.

[20] *Розанов, Ю. А.* Стационарные случайные процессы / Ю. А. Розанов — 2-е изд. — М. : Наука, 1990.

[21] *Севастъянов, Б. А.* Ветвящиеся процессы / Б. А. Севастьянов. — М. : Наука, 1971.

[22] *Скороход, А. В.* Случайные процессы с независимыми приращениями / А. В. Скороход. — 2-е изд. — М. : Наука. 1986.

[23] *Халмош, П.* Теория меры : пер. с англ. / П. Халмош. — М. : ИЛ, 1953.

[24] *Хида, Т.* Броуновское движение : пер. с англ. / Т. Хида. — М. : Наука. 1987.

Новые издания по дисциплине «Случайные процессы» и смежным дисциплинам

1. *Андрухаев, Х. М.* Теория вероятностей и математическая статистика. Сборник задач : практич. пособие для прикладного бакалавриата / Х. М. Андрухаев. — 3-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

2. *Вавилов, С. А.* Финансовая математика. Стохастический анализ : учебник и практикум для академического бакалавриата / С. А. Вавилов, К. Ю. Ермоленко. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

3. *Далингер, В. А.* Теория вероятностей и математическая статистика с применением Mathcad : учебник и практикум для прикладного бакалавриата / В. А. Далингер, С. Д. Симонженков, Б. С. Галюкшов. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

4. *Кацман, Ю. Я.* Теория вероятностей и математическая статистика. Примеры с решениями : учебник для прикладного бакалавриата / Ю. Я. Кацман. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

5. *Попов, А. М.* Теория вероятностей и математическая статистика : учебник для бакалавров / А. М. Попов, В. Н. Сотников. — М. : Издательство Юрайт, 2015.

Обозначения

Ниже перечислены часто используемые обозначения с указанием страниц, на которых они впервые введены.

Предметный указатель